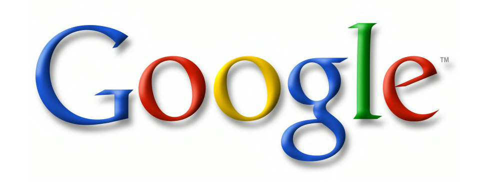
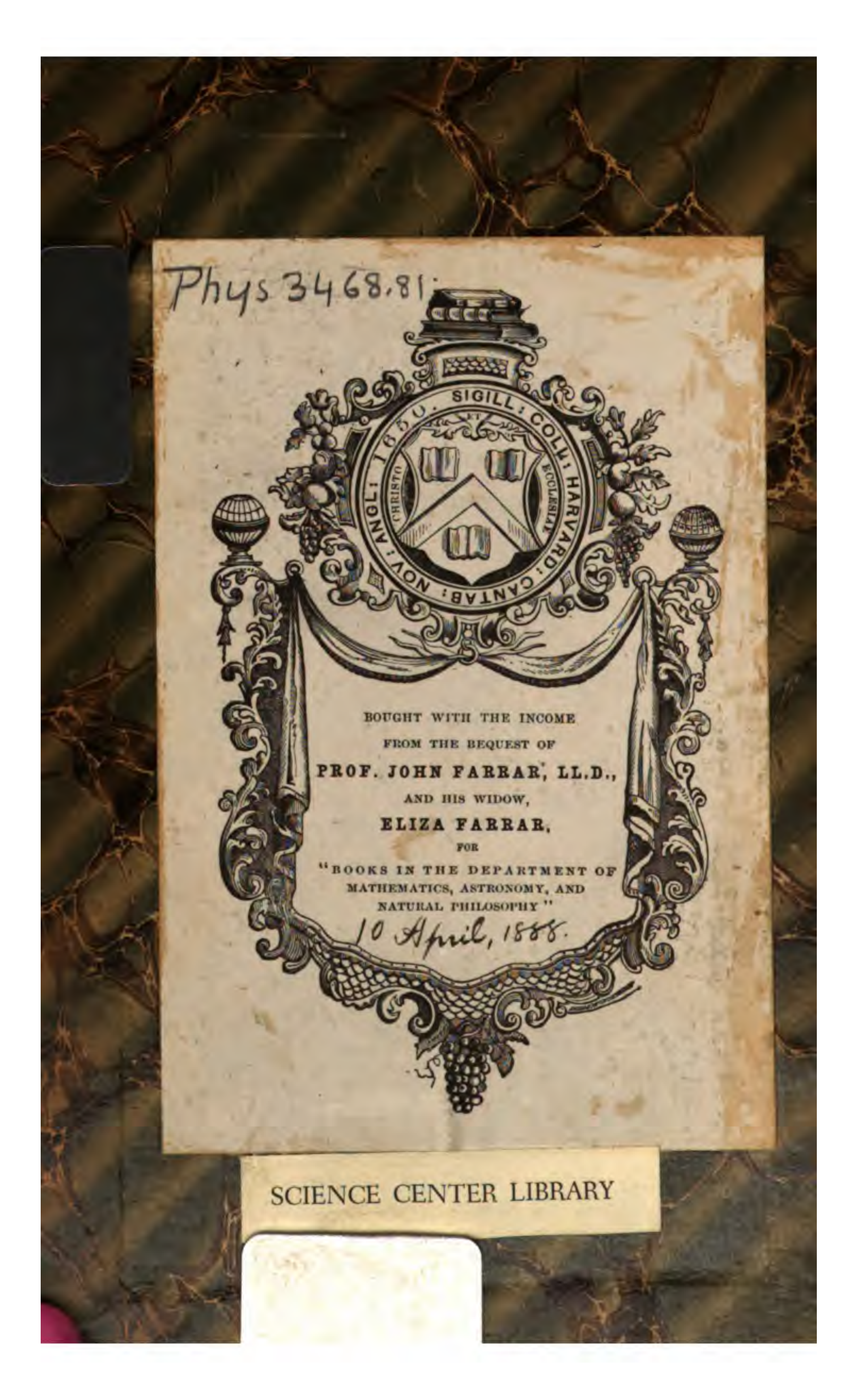
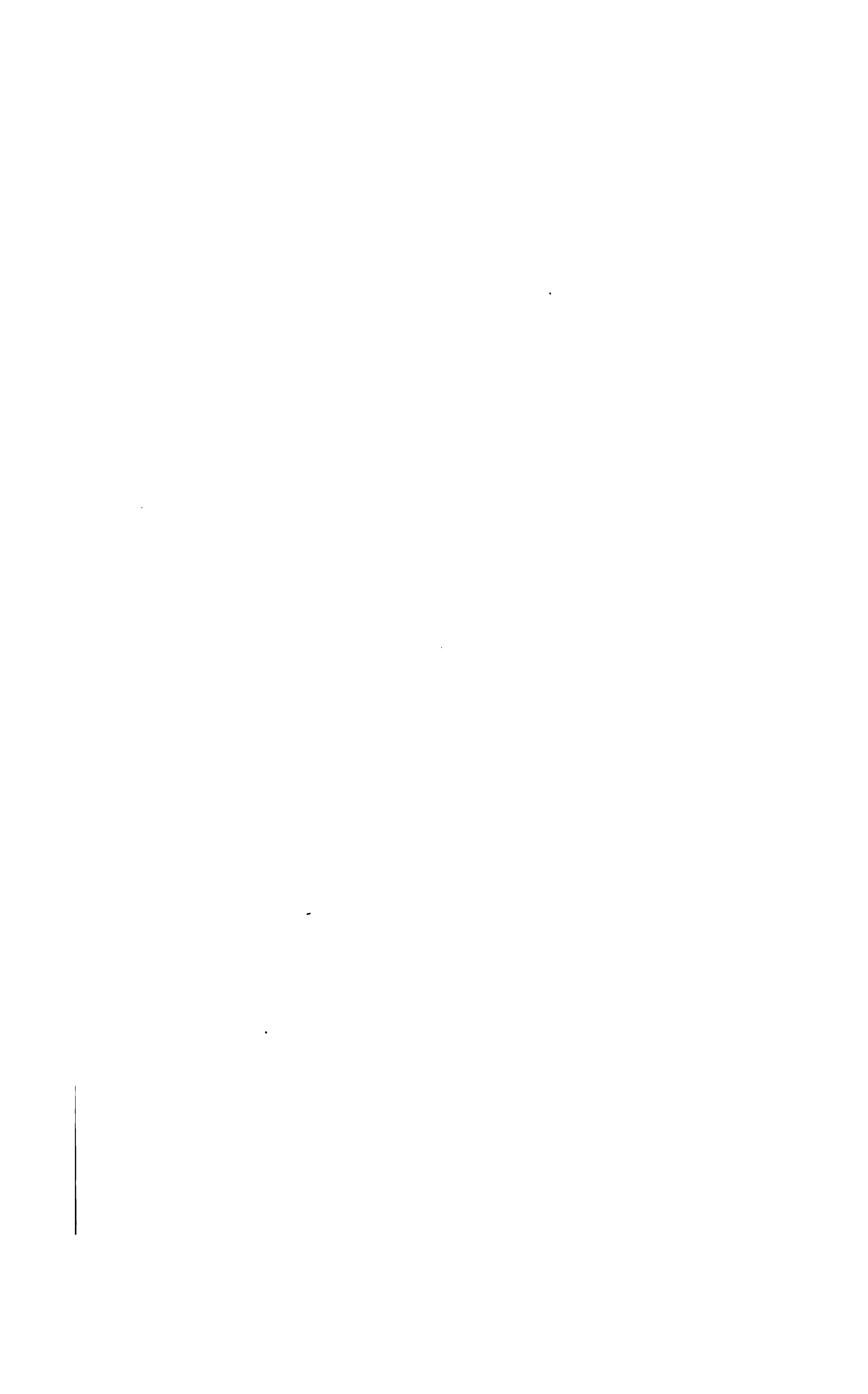





Phys 3468.81
SIGILL : COLL : HARVARD : CANTAB : NOV : ANGL : 1650.
CHRISTO
ECCLESIAE
BOUGHT WITH THE INCOME
FROM THE BEQUEST OF
PROF. JOHN FARRAR, LL.D.,
AND HIS WIDOW,
ELIZA FARRAR,
FOR
"BOOKS IN THE DEPARTMENT OF
MATHEMATICS, ASTRONOMY, AND
NATURAL PHILOSOPHY"
10 April, 1888.
SCIENCE CENTER LIBRARY





DES

GRANDEURS ÉLECTRIQUES

ET

DE LEUR MESURE EN UNITÉS ABSOLUES

PARIS. — IMPRIMERIE ARNOUS DE RIVIÈRE
26, RUE RACINE, 26

DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES ET DE LEUR MESURE EN UNITÉS ABSOLUES

PAR

Édouard Ernest

E. E. BLAVIER

DIRECTEUR-INGÉNIEUR DES LIGNES TÉLÉGRAPHIQUES
DIRECTEUR DE L'ÉCOLE SUPÉRIEURE DE TÉLÉGRAPHIE.

PARIS

DUNOD, ÉDITEUR

LIBRAIRE DES CORPS NATIONAUX DES PONTS ET CHAUSSÉES, DES MINES
ET DES TÉLÉGRAPHES

Quai des Augustins, 49

1881

DES

GRANDEURS ÉLECTRIQUES

ET DE

LEUR MESURE EN UNITÉS ABSOLUES

CHAPITRE PREMIER.

HISTORIQUE.

1.—Sir Humphry Davy a fait le premier connaître en 1821 que les différents métaux possèdent des pouvoirs conducteurs inégaux pour l'électricité, et que ce pouvoir conducteur diminue lorsque la température s'élève.

Cette propriété des métaux fut étudiée par plusieurs physiciens et notamment par M. Becquerel père, qui publia en 1826 une table des conductibilités que l'on cite encore fréquemment.

L'idée de conductibilité est forcément liée à celle d'une propriété inverse, qui est la résistance; néanmoins, jusqu'au moment où les lois de l'intensité des courants furent connues, on n'avait que des idées très vagues sur le rôle de cette résistance. On se représentait la pile comme régénérant perpétuellement une charge analogue à celle de la bouteille de Leyde, qui se décharge dès qu'un conducteur livre passage au fluide.

En 1827, Ohm publia un traité sur la théorie mathématique de la chaîne galvanique, dans lequel se trouvent énoncées les lois qui régissent les courants électriques; peu de temps après, en 1830 et 1831, MM. Pouillet et Fechner trouvèrent ces mêmes lois par l'expérience. La

résistance d'un conducteur fut dès lors nettement définie, bien que son véritable caractère n'ait été fixé que plus tard, lorsque Joule fit connaître les lois de l'échauffement des conducteurs sous l'influence du courant. La conséquence de ces lois fut de faire envisager la résistance électrique comme due à une sorte de résistance mécanique qui retarde le mouvement de l'électricité en absorbant sa force vive ; les grandeurs électriques se trouvèrent ainsi rattachées aux grandeurs mécaniques.

2. — L'idée de l'unité de résistance se trouve implicitement contenue dans la loi d'Ohm, mais les premiers physiciens qui se sont occupés de la question se sont bornés à réduire par le calcul la résistance de toutes les parties d'un circuit hétérogène en une longueur déterminée d'une partie donnée de ce circuit, de manière à constituer un circuit homogène imaginaire.

La résistance de ce circuit imaginaire fut nommée *longueur réduite*, nom qui est encore usité et restera probablement en usage pour les cas nombreux où l'on a besoin d'exprimer les résistances des parties secondaires d'un circuit en fonction de la partie principale.

On fit un pas de plus lorsque, pour comparer différents circuits, on représenta toutes les résistances par des longueurs d'un même fil-étalon, bien que ce fil n'appartînt pas à tous les circuits, ou même ne fît partie d'aucun d'eux, et lorsqu'on adopta l'unité de longueur de ce fil pour unité de résistance. C'est ainsi qu'en 1838 Lenz, pour décrire ses expériences, fit connaître qu'il employait pour unité de résistance un pied du fil de cuivre n° 11.

Lenz avait choisi arbitrairement son unité, sans avoir l'intention de la faire adopter dans la pratique. Un nouveau progrès fut réalisé par le professeur Wheatstone qui

In this eq. the vars are all mixed up.

INTRODUCTION

En 1852, l'Association britannique pour l'avancement des sciences a adopté, pour la mesure des grandeurs électriques, un ensemble d'unités fondé sur le système des unités absolues des professeurs Gauss et Weber. Bien que l'usage de ces unités commence à se répandre en France, leur origine y est encore peu connue. Les définitions qu'on en trouve dans quelques ouvrages techniques sont loin de satisfaire l'esprit, de donner une idée de leur importance et de pouvoir contribuer à les rendre populaires ; on en jugera par la définition suivante de l'unité de résistance donnée par M. Fleeming Jenkin, et reproduite par quelques auteurs :

« L'unité de résistance absolue $\left(\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}\right)$ est telle
« que le courant produit dans un circuit de cette
« résistance par la force électro-motrice d'une
« barre droite d'un mètre de longueur, qui se
« déplace à travers un champ magnétique ayant
« pour intensité l'unité d'intensité (définition de
« Gauss), perpendiculairement aux lignes de
« forces et à sa propre direction, développerait
« dans ce circuit, en une seconde de temps, une

« quantité de chaleur équivalente à l'unité ab-
« solue de travail, en supposant qu'il ne se pro-
« duise aucun autre travail, ou aucun effet équi-
« valent à un travail .D'après les expériences du
« docteur Joule, la quantité de chaleur équiva-
« lente à l'unité absolue de travail est la quantité
« nécessaire pour élever d'un degré centigrade
« 0,0002405 grammes d'eau prise à son maxi-
« mum de densité. »

Cet énoncé est bien compliqué, ainsi que le reconnaît l'auteur lui-même, et cependant il est difficile de définir plus simplement l'unité absolue de résistance lorsqu'on la considère isolément.

Pour bien comprendre les unités électriques absolues, il est nécessaire de les étudier dans leur ensemble, c'est ce que nous nous proposons de faire dans ce travail, après avoir passé en revue les lois et les propriétés de l'électricité et du magnétisme.

Nous commencerons par un court résumé historique des unités de résistance et des travaux de la commission chargée par l'Association britannique de fixer l'étalon définitif, résumé que nous extrayons en partie d'un rapport adressé à la Société royale de Londres, en 1865, par M. Fleeming Jenkin.

l'un de l'autre. Cette différence tenait à ce que ces étalons avaient été établis d'après des fils de qualités diverses, pris à des températures inégales.

M. du Moncel eut, en 1861, l'idée de construire un étalon de cette unité en prenant une moyenne entre les résistances, à une température fixe, d'un grand nombre d'échantillons de fils, il fit dans les ateliers de l'administration télégraphique française de nombreuses expériences dans lesquelles il constata des différences notables entre les pouvoirs conducteurs des fils de fer fournis par les divers fabricants. Les circonstances l'empêchèrent de construire un étalon définitif.

5. — Pour remédier aux inconvénients toujours croissants qui résultent de la discordance que l'on rencontre invariablement entre des séries différentes de bobines de résistance, le docteur Werner Siemens construisit, en 1810, des étalons en prenant pour unité la résistance d'une colonne de mercure chimiquement pur pris à la température de 0° centigrade, ayant pour longueur 1 mètre et pour section 1 millimètre carré.

Le mercure avait été déjà signalé comme un corps très propre à former un étalon par MM. Pouillet, Marié-Davy et de la Rive. L'unité de résistance adoptée par MM. Pouillet et Marié-Davy était la même que celle de M. Siemens ; mais ce dernier a eu le mérite de construire avec un très grand soin des bobines qui ont fourni le moyen matériel de donner une précision rigoureuse aux observations.

L'étalon à mercure de M. Siemens représente approximativement la résistance de 100 mètres de fil de fer de 4 millimètres de diamètre ; il est donc égal à environ 1/10 de l'ancienne unité française, ce qui en rend l'emploi commode dans notre pays.

La valeur du premier étalon de M. Siemens a été un

peu modifiée parce que, pour transformer en unités de longueur le poids du mercure contenu dans les tubes, il avait adopté 13,557 pour la densité de ce métal, tandis que des expériences plus récentes ont donné 13,595.

6. — La question en était à ce point, lorsqu'en 1861 l'Association britannique pour l'avancement des sciences, sur la proposition du professeur W. Thomson, chargea une commission de déterminer la meilleure unité de résistance électrique.

Cette commission, composée de MM. Willamson, Wheatstone, Thomson, Miller, A. Matthiessen et Jenkin, secondée par la Société royale de Londres qui lui accorda une subvention, se mit immédiatement à l'œuvre, et dès le mois d'octobre 1862 elle exposait à l'Association britannique, dans un rapport préliminaire, ses vues sur l'étalon qui lui paraissait répondre le mieux aux besoins de la science.

Elle proposait d'adopter le système des unités électromagnétiques absolues de Weber.

Après avoir posé les bases du nouveau système des unités électriques, il fallait déterminer avec une approximation suffisante la véritable grandeur de l'étalon de résistance et établir un certain nombre de types dans d'assez bonnes conditions pour qu'on n'eût pas à craindre leur variation.

Ce n'est qu'en septembre 1864 que la commission, à laquelle avaient été adjoints MM. Varley, Balfour Stewart, Siemens, Maxwell, Joule, Esselbach et Ch. Bright, put annoncer que ces travaux avaient été couronnés de succès et présenter son nouvel étalon de résistance.

Enfin, en septembre 1865, elle fit connaître que sa mission était terminée, qu'un certain nombre d'étalons étaient construits et que des copies étaient prêtes à être livrées aux personnes qui en feraient la demande.

proposa, en 1843, de prendre pour unité un pied du fil de cuivre du poids 100 grains (6^{gr},47), et de l'adopter comme étalon pour la mesure de toutes les résistances.

3. — C'est aussi à M. Wheatstone que paraît revenir le mérite d'avoir construit les premiers instruments à l'aide desquels on peut introduire dans un circuit, ou en retirer à volonté, des multiples de l'unité de résistance, instruments auxquels on a donné les noms de *rhéostats* et de *bobines de résistance.*

Il fut suivi de près dans cette voie par MM. Poggendorff, Jacobi, Buff, etc., mais chaque savant employait une unité particulière : les uns un fil de fer, d'autres un fil de cuivre, d'autres un fil d'argent pur ou d'argent allemand (maillechort). M. Pouillet avait déjà, à cette époque, rapporté la résistance des divers corps à celle du mercure en adoptant pour unité une colonne de mercure de 1 mètre de hauteur et de 1 millimètre carré de section.

En 1848, Jacobi, pour rendre comparables les résultats des expériences faites par les physiciens des divers pays, envoya à plusieurs d'entre eux un certain fil de cuivre, connu depuis sous le nom d'*étalon Jacobi*, en les invitant à en prendre des copies. Il faisait remarquer, avec raison, qu'il ne suffit pas, pour définir un étalon, de donner la longueur et le poids du fil dont il est formé, et que de bonnes copies établies par des procédés électriques sont préférables à des reproductions exécutées dans un laboratoire d'après la description d'un étalon qu'on n'a pas entre les mains (*).

4. — Jusqu'en 1850 on ne s'était occupé de la me-

(*) La copie d'un étalon est un fil formé d'une substance quelconque dont on a déterminé *par l'expérience* la longueur, de façon qu'il offre au courant la même résistance que l'étalon.

sure des résistances que dans le cabinet des savants; mais vers cette époque la télégraphie électrique commença à prendre une grande extension : on établit des conducteurs souterrains, et bientôt après on immergea des câbles sous-marins. Les ingénieurs praticiens comprirent combien la connaissance des lois de l'électricité était utile pour la construction des lignes, leur amélioration, la recherche des points défectueux et pour la détermination des meilleures formes à donner aux conducteurs, aux piles et aux appareils.

Le premier résultat de l'usage des résistances dans la pratique industrielle fut d'amener la substitution de l'unité de longueur du fil télégraphique aux étalons divers adoptés pour les expériences de cabinet.

En Angleterre on adopta, en général, le mille de fil de cuivre de 1/16 de pouce de diamètre; en Allemagne, le fil de fer n° 8; en France, en Belgique et en Suisse, le fil de fer de 4 millimètres de diamètre.

Le choix de ces unités avait pour la télégraphie l'avantage de rendre les calculs plus faciles, car la transformation des résistances secondaires en unités de longueur du fil de la ligne, qu'on est obligé d'effectuer dans la plupart des expériences télégraphiques, se trouvait faite naturellement.

Cependant cet avantage disparut en partie lorsqu'on fit usage pour les lignes aériennes de fils de fer de différents diamètres (de 3, de 4 et de 5 millimètres), et qu'on intercala sur leur parcours des lignes souterraines.

De plus, les étalons construits d'après cette unité étaient loin de présenter une concordance suffisante. Ainsi MM. Bréguet et Digney avaient établi des étalons représentant la résistance de 1 kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre, qui différaient de 7 p. 100

deurs électriques et les grandeurs mécaniques étaient représentées par les trois équations qui précèdent, la série des unités serait encore indéterminée, car on pourrait choisir l'une d'elles arbitrairement. Mais, outre ces trois équations, il en existe plusieurs autres parmi lesquelles on est obligé d'en choisir une seule, puisque le nombre d'unités à fixer est seulement de quatre. Il existe donc plusieurs systèmes d'unités absolues qui ont été indiqués par Weber.

En premier lieu, en adoptant pour l'unité de quantité d'électricité, Q, la quantité qui repousse avec l'unité de force une quantité égale d'électricité de même nom située à l'unité de distance, on peut établir une ensemble d'unités électriques, qui constitue le système *électro-statique*.

Deux courants agissent l'un sur l'autre par attraction ou répulsion, suivant qu'ils ont la même direction ou des directions opposées. Un autre système peut être basé sur cette propriété ; les unités qui en résultent se nomment unités *électro-dynamiques*.

Enfin il existe un troisième système qui est fondé sur les propriétés électro-magnétiques du courant. L'unité d'intensité est celle du courant, dont l'unité de longueur développe sur l'unité du pôle magnétique l'unité de force, tous les points du courant étant situés à une distance du pôle égale à l'unité de longueur. Quant à l'unité de pôle magnétique, c'est celui qui repousse avec l'unité de force un pôle semblable situé à l'unité de distance. On ne peut, il est vrai, concevoir isolément l'unité de pôle magnétique, mais Gauss a donné le moyen de déterminer en fonction de cette unité le moment magnétique d'un barreau aimanté et la valeur du magnétisme terrestre, données suffisantes pour établir le système complet des unités électriques ; on les nomme unités *électro-magnétiques*.

Les unités électro-magnétiques ne diffèrent que par un simple coefficient numérique de celles qui sont fondées sur les propriétés électro-dynamiques du courant.

C'est à ce troisième système d'unités, système électro-magnétique, que la commission chargée de déterminer l'étalon de résistance a donné la préférence comme étant celui dont l'emploi est le plus commode.

Il permet d'obtenir directement la valeur de l'intensité du courant en unités absolues au moyen d'une boussole de tangentes ordinaire, quand on connaît la valeur de la composante horizontale du magnétisme terrestre.

10. — Avant de réaliser les nouvelles unités et de construire des étalons, sinon pour toutes les grandeurs électriques, du moins pour la résistance, il se présentait plusieurs questions à résoudre.

L'unité de résistance est proportionnelle à l'unité de longueur et en raison inverse de l'unité de temps. Elle peut être représentée, comme l'unité de vitesse, par le symbole

$$\frac{\text{Unité de longueur}}{\text{Unité de temps}}.$$

Pour l'unité de temps il ne pouvait y avoir aucun doute, la seconde était naturellement indiquée ; mais pour l'unité de longueur on avait le choix entre les unités adoptées dans les divers pays. Quelques membres de la commission proposaient d'adopter le pied dont on se sert en Angleterre, mais la majorité s'est prononcée en faveur du mètre. C'est un hommage rendu à notre système métrique qui ne peut qu'être bien accueilli en France.

L'unité absolue de résistance a donc pour expression $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$.

11. — Un étalon de résistance doit être en rapport

7. — Les unités de résistance dont il a été question précédemment sont formées d'une matière déterminée, plus ou moins convenablement choisie et présentant un poids et des dimensions arbitraires ; mais on peut concevoir et exécuter des unités de résistance sans avoir recours aux propriétés particulières d'aucune espèce de corps, et sans introduire aucune autre notion que celle des unités de temps, de longueur et de masse. Les unités qu'on obtient ainsi sont dites *unités absolues.*

Les principales grandeurs électriques sont au nombre de quatre :

La *quantité*, qui représente, à l'état statique, la masse d'électricité libre répandue sur la surface d'un corps conducteur, nous la représenterons par Q ;

L'*intensité du courant*, I, qui est mesurée par ses effets chimiques et mécaniques ;

La force électro-motrice, E, origine du mouvement électrique, qui est proportionnelle à l'intensité du courant qu'elle développe dans un circuit donné ;

Enfin la *résistance*, R, qui dépend de la dimension et de la nature des corps dont un circuit est composé.

Il existe entre ces quatre quantités deux relations bien connues.

En premier lieu la quantité d'électricité qui traverse un conducteur pendant un intervalle de temps t étant proportionnelle à t et à l'intensité du courant, on peut poser :

$$Q = It. \tag{1}$$

L'unité d'intensité est donc celle du courant produit par l'unité de quantité traversant un conducteur quelconque dans l'unité de temps, ou réciproquement, si l'on fixe l'unité de courant, l'unité de quantité est celle qui parcourt le conducteur dans l'unité de temps.

argent, d'un alliage platine-argent, d'un alliage platine-iridium. On a construit avec chacune de ces substances deux étalons égaux, de telle sorte que, si la résistance de quelques-uns d'entre eux venait à se modifier avec le temps ou par suite d'accident, on puisse s'en apercevoir en les comparant aux autres. Les étalons formés de métaux solides sont des fils de 0,5 à 0,8 millimètres de diamètre et de 1 à 2 mètres de longueur. Ils sont recouverts de soie blanche et roulés sur un long cylindre creux; l'espace compris entre ce cylindre et un autre cylindre extérieur est rempli de paraffine. La forme longue et creuse permet aux étalons de prendre rapidement la température du milieu ambiant; on peut, sans les endommager, les plonger dans un bain d'eau et les conserver à la température à laquelle leur résistance représente exactement l'unité. Les étalons en mercure sont renfermés dans deux tubes de verre de $0^m,75$ environ de longueur. Ces dix étalons offrent exactement la même résistance à une température qui se trouve indiquée sur chacun d'eux et qui est comprise entre 14°,5 et 16°,5 cent.

Pour les copies, une durée indéfinie n'est pas indispensable, puisqu'on peut, de temps en temps, les comparer aux étalons; mais, par contre, il convient d'employer des substances dont la résistance change peu avec la température, afin d'éviter aux expérimentateurs des pertes de temps ou des corrections importantes lorsque les essais sont faits à des températures différentes et souvent peu connues.

L'argent allemand (maillechort) remplit assez bien ces conditions, mais M. Matthiessen a reconnu que sa résistance se modifie quelquefois avec le temps sans cause apparente; la commission a préféré un alliage de platine-argent pour les copies qu'elle fait exécuter, qui

avec les grandeurs dont on fait usage dans la pratique, pour que celles-ci lui soient facilement comparables et pour éviter l'emploi de trop grands multiples. Or l'unité absolue $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ offre une résistance à peu près égale à celle de $\frac{1}{100}$ de millimètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre : c'était un étalon admissible.

Les principales unités de résistance en usage avant le travail de la commission étaient : pour les expériences délicates, le pied anglais d'un fil de cuivre du poids de 100 grains (unité proposée en 1843 par M. Wheatstone), qui, réduit en unités françaises de fil de fer de 4 millimètres, représente environ 1^{m},25 de longueur ; pour les recherches télégraphiques, le mille anglais de fil de cuivre de $\frac{1}{16}$ de pouce de diamètre (unité de M. Varley), correspondant à environ 2 kilomètres et demi de fil de fer de 4 millimètres ; l'unité française, égale à 1 kilomètre de fil de fer de 4 millimètres ; l'unité de M. Siemens, correspondant approximativement à 0,1 unité française.

L'étalon de la commission anglaise devait être compris entre les deux extrêmes de ces unités. On a adopté le $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ multiplié par 10.000.000, qui donne une résistance peu différente de l'unité Siemens, ou de 100 mètres de fil de fer de 4 millimètres de diamètre. C'est une grandeur convenable qui satisfait à toutes les exigences. Elle se représente par le symbole :

$$10^7 \frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$$

ou

$$\frac{\text{Le quart du méridien terrestre}}{\text{Une seconde}}.$$

12. — Weber avait déjà déterminé la grandeur de l'unité électro-magnétique absolue de résistance par plu-

sieurs méthodes fondées sur la force électro-motrice que développe l'induction.

Pour une question aussi importante que celle de la fixation d'un étalon, il était prudent de ne pas s'en rapporter aux résultats trouvés par un seul observateur, aussi la commission résolut-elle de déterminer elle-même la véritable grandeur de son unité.

Le procédé qu'elle a adopté, d'après les indications de sir Willam Thomson, repose également sur l'induction et consiste à observer la déviation d'un petit aimant mobile placé au centre d'une bobine tournante soumise à l'action inductrice du magnétisme terrestre (*).

Les expériences ont été faites à King's College en 1863 et 1864 par MM. Clerk Maxwell, Fleeming Jenkin et Balfour Stewart. Le nouvel étalon a été établi d'après les résultats de ces expériences.

MM. Maxwell et Jenkin admettent que cet étalon ne diffère pas de plus de 0,1 pour 100 de la véritable valeur de l'unité absolue (**).

13. — Un étalon de mesure doit être absolument invariable ; or l'unité absolue de résistance, déterminée au moyen d'expériences délicates et minutieuses, ne peut présenter ce caractère, car de nouvelles expériences faites à l'aide de méthodes perfectionnées peuvent donner une plus grande approximation et conduire à une grandeur un peu différente.

L'Association britannique a levé cette objection en admettant en principe que l'étalon, tel qu'il a été déterminé par MM. Maxwell et Jenkin, serait l'étalon définitif, mais qu'il ne serait pas présenté comme la grandeur

(*) Les expériences de la commission seront décrites dans un chapitre spécial.

(**) Cette approximation est contestée par plusieurs physiciens.

représentent l'unité de l'Association britannique à une température d'environ 15° centigrades ; leur résistance ne varie pas de plus de 0,031 pour 100 pour chaque degré centigrade. Leur forme est d'ailleurs la même que celle des étalons.

La commission a fait établir un certain nombre de copies qu'elle tient à la disposition des personnes qui en font la demande au prix de 60 francs (2 livres 10 schillings).

Sur la proposition de MM. Clark et Bright on a nommé *Ohmade* ou simplement *Ohm* l'étalon B. A. de l'Association britannique.

15. — En ce qui concerne les trois autres grandeurs électriques, la quantité, l'intensité et la force électro-motrice, elles ne comportent pas d'étalon matériel, puisqu'elles ne peuvent se manifester sans une consommation de matière, de chaleur ou de travail ; mais on peut les mesurer directement en unités absolues au moyen d'instruments spéciaux. C'est ainsi que la boussole des tangentes peut donner la valeur de l'intensité du courant ; avec la même boussole on peut avoir la mesure de la quantité.

La force électro-motrice peut se mesurer au moyen des électro-mètres : on a cherché à réaliser des types de force électro-motrice, mais on n'a pas encore complétement réussi. Les moyens mécaniques sont trop compliqués ; les couples thermo-électriques et les couples voltaïques n'offrent pas une constance suffisante pour donner une mesure exacte *.

* M. Latimer Clark a proposé récemment un élément formé de zinc, mercure, sulfate de zinc et sulfate de mercure, qui, d'après ses expériences, offrirait, au moment de la fermeture du circuit, une force électro-motrice parfaitement constante, et pourrait être employé comme élément type.

MM. Charles Bright et Latimer Clark ont proposé de donner un nom spécial, non-seulement à l'étalon de résistance, mais encore aux unités absolues des autres grandeurs électriques.

Sur leur proposition, on a adopté le nom de Volt (Volta) pour l'unité de force électro-motrice et celui de Farad (Faraday) pour l'unité de quantité.

Quant à l'unité d'intensité, qui n'avait pas d'abord reçu de nom particulier, on lui a donné celui de Weber.

Nous ne discuterons pas ici le système des unités électriques adopté par l'association scientifique, nous réservant d'y revenir plus tard lorsque nous les aurons complétement décrites.

Comme ces unités se lient directement aux unités mécaniques absolues, nous passerons d'abord rapidement en revue ces dernières.

CHAPITRE II.

UNITÉS MÉCANIQUES ABSOLUES.

16. — On ne peut comparer entre elles que des grandeurs de même nature; il existe donc autant d'unités différentes que de grandeurs.

Les unités peuvent être choisies indépendamment les unes des autres, et c'est ainsi qu'elles l'ont été dans un grand nombre de cas; mais il existe entre les diverses grandeurs des relations que l'étude des sciences mathématiques ou physiques apprend à connaître, et il est naturel de rattacher les unes aux autres les diverses unités en prenant pour point de départ quelques-unes d'entre elles dont on déduit toutes les autres. On obtient ainsi un système coordonné de mesures infiniment plus rationnel, qui rend les calculs plus simples en évitant l'emploi de coefficients inutiles et constitue ce qu'on nomme le système des *unités absolues*.

Si, par exemple, on adoptait pour unité de surface celle d'un rectangle dont les côtés seraient choisis arbitrairement, on serait obligé, pour obtenir la surface d'un rectangle quelconque, de faire le produit des deux côtés et de diviser le résultat par le produit des côtés du rectangle unité, tandis que l'opération se borne à une simple multiplication si l'on prend pour unité de surface le carré qui a pour côté l'unité de longueur. Il en est de même pour la mesure des volumes et pour celle de la plupart des autres quantités.

« Le mot *absolu* est employé par opposition au mot relatif. Par *mesure absolue*, on ne doit pas entendre une mesure exécutée avec une précision particulière, ni par *unité absolue* une unité d'une construction parfaite; en d'autres termes, en faisant usage des mots *mesures* ou *unités absolues*, on ne veut pas dire qu'elles sont *absolument* parfaites, mais simplement que ces mesures au lieu d'être établies par une simple comparaison de la quantité à mesurer avec une quantité de même espèce, sont rapportées à des unités fondamentales dont la notion est admise comme un axiome. » (Rapport de M. Jenkin.)

Avant 1792, il existait en France pour chaque grandeur usuelle une ou plusieurs unités arbitraires, dont la grandeur était même variable d'une province à l'autre. Pour les longueurs on avait le pied, la toise, la ligne, etc.; pour les surfaces, le pied carré, la toise carrée, l'arpent, la perche, etc.

La Convention nationale mit fin à la confusion qui résultait de l'usage de ces unités si diverses, en les remplaçant par un ensemble d'unités dérivées du mètre, et posa ainsi les bases du système des unités absolues. L'emploi de la numération décimale pour la formation des multiples et sous-multiples compléta l'œuvre en réduisant les transformations d'unités à un simple déplacement de virgule.

La grandeur du mètre avait été choisie de façon à ne pouvoir éveiller aucune susceptibilité d'amour-propre national, aussi l'usage des mesures métriques françaises s'est-il répandu dans beaucoup de pays; même dans ceux, comme l'Angleterre ou l'Allemagne, où l'on fait encore usage d'autres unités, les savants adoptent le mètre pour base de leurs mesures.

17. — Les unités dérivées se déduisent des relations

qui les lient aux unités dont on veut les faires dépendre.

Supposons que A représente une grandeur d'une certaine espèce, liée à d'autres grandeurs par une relation connue $A = f(a, b, c, \ldots)$: pour une autre valeur de a, b et c, on aura $A' = f(a', b', c', \ldots)$, d'où l'on tire

$$\frac{A'}{A} = \frac{f(a', b', c', \ldots)}{f(a, b, c, \ldots)}.$$

Si l'on prend A pour unité, on aura pour la valeur de A' en fonction de cette unité

$$A' = \frac{f(a', b', c', \ldots)}{f(a, b, c, \ldots)} \quad \text{ou} \quad A' = \frac{1}{K} f(a', b', c', \ldots).$$

Le coefficient K représentant la valeur de la fonction $f(a, b, c, \ldots)$ qui correspond à l'unité A.

Si l'on veut éviter l'emploi de ce coefficient, qui est inutile et ne peut qu'embarrasser dans les calculs, il faut, au lieu de prendre arbitrairement l'unité A, la choisir de telle façon que $f(a, b, c, \ldots)$ soit égal à l'unité.

L'équation $f(a, b, c, \ldots) = 1$ contenant plusieurs inconnues peut être résolue de plusieurs manières ; on choisit naturellement celle qui donne la définition la plus simple de l'unité A, en prenant, lorsqu'il est possible, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, etc.

Lorsqu'il s'agit d'unités élémentaires comme celles de surface, de volume, de vitesse, etc., il ne peut se présenter aucune difficulté, mais il n'en est pas de même pour certaines grandeurs physiques, telles que les grandeurs électriques ou magnétiques, car il peut exister entre elles et les autres grandeurs plusieurs relations entre lesquelles on est obligé de choisir. De plus, les lois trouvées par l'expérience s'appliquent quelquefois à des éléments infiniment petits, qui ne permettent pas de déterminer directement la grandeur véritable de l'unité.

Les unités se divisent en deux catégories, les unités fondamentales et les unités dérivées.

Les premières sont celles qu'on fixe préalablement d'une manière arbitraire ; leur nombre doit être aussi restreint que possible et leur grandeur doit être déterminée de façon à leur assurer une même valeur pour tous les points de la terre et une constance qui ne puisse être mise en doute.

Unités fondamentales.

18. — On aurait pu à la rigueur réduire à deux le nombre des unités fondamentales en faisant intervenir la loi de la gravitation universelle. Les unités de longueur et de masse étant fixées, on aurait pris pour unité de force celle avec laquelle s'attirent deux masses égales à l'unité situées à l'unité de distance, puis de l'unité de force on aurait déduit l'unité de temps. Mais, en fait, on a adopté trois unités fondamentales, l'unité de temps, l'unité de longueur et l'unité de masse.

19. — *Unité de temps.* — L'unité de temps adoptée dans tous les pays civilisés est la seconde. Sa valeur est la 86,400^{me} partie du jour moyen solaire, dont la durée a été fixée très-exactement par les observations astronomiques. Il a été prouvé que cette durée n'a pas varié d'une manière sensible depuis plusieurs milliers d'années.

20. — *Unité de longueur.* — L'unité de longueur est encore variable d'un pays à l'autre. Celle dont l'usage tend à se généraliser est le mètre qui est la dix millionième partie du quart du méridien terrestre.

Des étalons inaltérables, construits avec le plus grand soin par Borda, sont déposés dans les caves de l'Observa-

toire de Paris et assurent à cette unité un caractère de permanence incontestable*.

21. — *Unité de masse.* — L'unité de masse dans le système métrique est la masse d'un centimètre cube d'eau distillée prise au maximum de densité**; sa valeur est partout la même. Dans quelques traités on emploie le mot gramme pour représenter l'unité de masse; on n'attache pas alors à ce mot l'idée de force, mais simplement celle de la masse dont le poids est un gramme.

On a construit comme pour le mètre des Étalons métalliques qui représentent l'unité de masse avec une très-grande exactitude.

22. — Toutes les unités mécaniques peuvent être déduites de ces trois unités fondamentales, qu'on représente par les lettres T, L et M: T est l'unité de temps, L l'unité de longueur, et M l'unité de masse.

Il est nécessaire de connaître les relations qui lient les unités dérivées aux trois unités fondamentales, afin de pouvoir calculer facilement le changement qu'elles devraient subir si une ou plusieurs des unités fondamentales étaient modifiées, si, par exemple, on passait du système métrique à un autre.

Ces relations constituent ce qu'on nomme les *dimensions* des unités dérivées. Les dimensions de l'unité de surface sont L^2. Celles de l'unité de volume L^3.

Ces dimensions sont utiles pour vérifier les équations

* Les calculs de Delambre pour déterminer la longueur du mètre ont été refaits avec une plus grande précision, et on a reconnu une légère différence entre le mètre et la dix millionnième partie du quart du méridien terrestre, mais l'unité de longueur n'en reste pas moins le mètre tel qu'il a été fixé matériellement par Borda.

** Bien qu'elle ait le mètre pour point de départ, l'unité de masse n'en est pas moins une unité arbitraire, car on aurait pu prendre la masse de l'unité de volume de toute autre substance que l'eau.

auxquelles on est conduit dans les recherches de physique mathématique, car en substituant aux diverses grandeurs que contiennent ces équations leurs dimensions en fonctions des unités fondamentales, l'équation à laquelle on arrive doit toujours être homogène, c'est-à-dire que chaque terme doit contenir ces unités au même exposant.

Unités mécaniques dérivées.

23. — *Unité de vitesse.* — La vitesse d'un corps animé d'un mouvement uniforme est l'espace qu'il parcourt dans l'unité de temps, ou plus généralement le rapport de l'espace parcouru l au temps t employé à la parcourir : $v = \frac{l}{t}$.

Dans le cas d'un mouvement varié le temps t et l'espace l sont considérés comme infiniment petits.

En faisant $l = 1$ et $t = 1$, on a $v = 1$. L'unité de vitesse est donc celle d'un mobile animé d'un mouvement uniforme qui dans l'unité de temps parcourt un espace égal à l'unité de longueur. En nommant V l'unité de vitesse, on a :

$$V = \frac{L}{T}.$$

Cette équation représente les *dimensions* de l'unité de vitesse. Cette unité changerait naturellement si l'on adoptait d'autres unités pour la longueur ou le temps. Sa grandeur serait double si l'on doublait l'unité de longueur, ou si l'on réduisait de moitié celle du temps.

24. — *Unité de vitesse de rotation.* — Lorsqu'un système mobile tourne autour d'un axe, chacun de ses points décrit un arc de cercle dont le centre est situé sur l'axe fixe.

Si le mouvement est uniforme, la vitesse de rotation u est l'angle décrit par le système pendant l'unité de temps, ou le rapport $\frac{\omega}{t}$ de l'angle de rotation ω à l'intervalle de temps t employé à le décrire : $u = \frac{\omega}{t}$.

Pendant cet espace de temps, un point quelconque situé à une distance r de l'axe parcourt un espace l égal à ωr, ou à utr, donc : $u = \frac{l}{rt}$.

Si l'on considère une révolution entière, $l = 2\pi r$, et, si T est la durée de cette révolution,

$$u = \frac{2\pi}{T}.$$

On aura l'unité de vitesse de rotation en faisant $T = 2\pi$ ou 6,2832.

Ainsi l'unité de vitesse de rotation est celle d'un système qui tournerait de manière à effectuer une révolution entière en 6 secondes, 2832, ou qui dans une seconde décrirait un angle égal à $\frac{360°}{2\pi} = 57°, 19' 11''$.

25. — ***Unité de Force.*** — La force est la cause originelle du mouvement, cause inconnue que l'on ne peut définir que par ses effets.

Une force, en agissant sur un corps, augmente sa vitesse ; la force est dite constante lorsque dans des temps égaux l'augmentation de vitesse, ou l'accélération, est elle même constante.

D'après les principes fondamentaux de la mécanique une force constante qui agit sur un corps est proportionnelle à la masse m de ce corps et à l'accélération v qu'elle imprime pendant un intervalle de temps donné t.

f étant la grandeur de la force et K un coefficient constant : $f = \frac{Kmv}{t}$.

Dans le cas d'une force variable, t représente une durée infiniment petite, et v l'augmentation de vitesse également infiniment petite qui correspond à cet espace de temps.

Pour avoir l'unité absolue de force, il faut faire $K = 1$, $m = 1$, $t = 1$, et $v = 1$. Ainsi l'unité de force est celle qui dans l'unité de temps imprime à l'unité de masse une accélération égale à l'unité de vitesse; F étant l'unité de force :

$$F = \frac{MV}{T}, \quad \text{et comme} \quad V = \frac{L}{T}$$

$$F = \frac{ML}{T^2}.$$

Ce sont les dimensions de l'unité de force.

26. La pesanteur fournit un moyen commode pour comparer les forces; on a donc été conduit à adopter, dans la pratique, pour unité de force le poids de l'unité de masse, c'est-à-dire le gramme avec ses multiples et ses sous-multiples.

Cette unité diffère de l'unité absolue, puisque la vitesse imprimée à un corps par la pesanteur au bout d'une seconde est à Paris de 9 mètres, 8089.

La force F_1 qui correspond au poids de l'unité de masse, ou le gramme, doit être exprimée en unités absolues par le nombre 9, 8089 qu'on représente par g;

On a donc $E_1 = gF$, ou $F = \frac{F_1}{g}$.

Ainsi l'unité absolue de force, est égale au poids de l'unité de masse divisé par 9,8089 : sa valeur est $\frac{1^{gr}}{9,8089} = 0^{gr},10194$.

Si l'on prend le kilogramme pour unité de force, on a, en le représentant par F_k,

$$F_k = 1000 F_1 = 1000 gF.$$

On aurait pu, dans le système des unités absolues, adopter pour unité fondamentale l'unité de force au lieu de l'unité de masse. L'unité de force aurait été le gramme ou le poids d'un centimètre cube d'eau, et l'on en aurait déduit l'unité de masse qui eût été égale à celle d'un centimètre cube d'eau multipliée par g.

L'intensité de la pesanteur n'est pas partout la même; elle est modifiée par la force centrifuge due à la rotation de la terre et par la forme un peu aplatie de notre globe vers les pôles. Sa valeur aux divers points de la terre est donnée par la formule

$$g = 9.78024(1 + 0,00513 \sin^2 \lambda).$$

λ étant la latitude du lieu d'observation. Elle subit donc de l'équateur au pôle, une variation d'environ 1/2 pour 100. C'est pour cette raison que Gauss et Weber, les auteurs du système des unités absolues, ont préféré adopter comme unité fondamentale l'unité de masse.

La faible variation qu'éprouve la pesanteur aux divers points de la terre offre peu d'inconvénients dans la pratique ; aussi n'est-il pas probable que, pour l'usage courant, on substitue jamais l'unité absolue de force au poids de l'unité de masse, ce qui exigerait deux systèmes distincts d'étalons, ou l'emploi constant du coefficient g *.

27. — *Unité de travail.* — On nomme travail d'une force le produit de la grandeur de cette force pour l'espace que parcourt son point d'application, lorsqu'elle

* On aurait pu faire concorder les deux unités en prenant pour unités fondamentales les unités de masse et de force; en adoptant pour cette dernière l'intensité de la pesanteur à une latitude moyenne; on aurait déduit l'unité de longueur qui eût été égale à environ $9^m,808$.

agit dans la direction du mouvement. Si par suite d'une vitesse acquise, ou pour toute autre cause, le point d'application ne se meut pas dans la direction de la force, le travail est le produit de la force par la projection, sur sa direction, de l'espace parcouru.

w étant le travail de la force f, l l'espace parcouru ou sa projection sur la direction de la force, on a $w = lf$.

Si la direction et l'intensité de la force varient à chaque instant, pour avoir le travail total de la force, on fait la somme des travaux élémentaires, en considérant une série d'intervalles infiniment petits pendant lesquels les espaces parcourus peuvent être considérés comme des lignes droites et la force comme constante.

Le travail est négatif lorsque la force agit en sens contraire du mouvement; dans ce cas la vitesse diminue.

L'unité de travail W est le travail produit par l'unité de force quand l'espace parcouru est égal à l'unité de longueur; on peut donc poser $W = LF$. L'unité de force ayant pour dimensions $F = \frac{ML}{T^2}$, on a pour celles de l'unité de travail :

$$W = \frac{ML^2}{T^2}.$$

L'unité de travail employée dans la pratique est le kilogrammètre ; c'est le travail exécuté par un kilogramme qui tomberait de 1 mètre de hauteur. Cette unité est différente de l'unité absolue.

En la désignant par W_k, on a $W_k = F_k L$,

F_k étant le kilogramme, dont la valeur en unités absolues est $F_k = 1000gF$.

Le kilogrammètre W_k et l'unité absolue du travail W sont donc liés par la relation

$$W_k = 1000\,gW.$$

28. — ***Force vive.*** — La force vive est le produit mv^2 de la masse m d'un corps par le carré de la vitesse dont il est animé.

Lorsqu'un corps se meut sous l'influence d'une force, sa vitesse varie, et par conséquent sa force vive se modifie. Elle augmente si la force agit dans le sens du mouvement et diminue dans le cas contraire. On démontre en mécanique que l'augmentation ou la diminution de force vive mv^2 est numériquement égale au double du travail de la force, de sorte qu'on a $mv^2 = 2fl$, f étant la force et l l'espace parcouru, ou sa projection sur la direction de la force.

Si l'on appelle *quantité de force vive* le produit $\frac{1}{2}mv^2$, on peut dire qu'une force développe ou absorbe une quantité de force vive égale à son travail. Il y a donc équivalence entre une quantité déterminée de force vive et une quantité numériquement égale de travail. Les dimensions des deux grandeurs doivent être identiques; on a, en effet, pour l'unité de force vive $\frac{1}{2}MV^2$, et en remplaçant V par $\frac{L}{T}$, $\frac{1}{2}\frac{ML^2}{T^2}$.

29. — *Chaleur.* — Lorsqu'un corps animé d'une certaine vitesse est arrêté ou retardé dans son mouvement sans qu'il y ait production de travail mécanique, il se développe une quantité de chaleur proportionnelle à la force vive perdue; réciproquement, dans une machine mise en jeu par la chaleur, une quantité donnée de travail produit correspond toujours à une même quantité de chaleur disparue; on en conclut qu'il y a transformation de la chaleur en travail ou en force vive, et réciproquement. On l'explique en admettant que la chaleur est due à un mouvement des particules élémen-

taires de la matière ou de l'éther. La force vive d'un corps en mouvement ne se perd pas par le frottement ou la résistance qu'il éprouve de la part d'autres corps, mais elle se communique aux molécules de ces derniers et produit de la chaleur.

L'unité ordinairement adoptée pour la mesure de la chaleur est la quantité nécessaire pour élever de 1° centigrade 1 kilogramme d'eau primitivement à 0° et se nomme *calorie*. Désignons cette unité par Ch_1.

Une quantité de chaleur étant équivalente à une quantité déterminée de travail, on peut poser, en prenant pour unité de travail le kilogrammètre W_k

$$Ch_1 = CW_k.$$

C est un coefficient numérique, qui représente le nombre de kilogrammètres correspondant à la disparition d'une quantité de chaleur égale à une calorie : c'est l'*équivalent mécanique* de la chaleur. Les expériences nombreuses qui ont été faites pour déterminer sa valeur ont fourni des chiffres qui varient un peu. On admet en général 425, ce qui donne :

$$Ch_1 = 425 W_k.$$

Ainsi, pour développer un travail de 425 kilogrammètres il faut dépenser une calorie de chaleur, ou 1 kilogramme, en tombant d'une hauteur de 425 mètres, développerait une quantité de chaleur égale à une calorie, c'est-à-dire capable d'élever de 1° centigrade 1 kilogramme d'eau.

On a entre le kilogrammètre W_k, et l'unité absolue de travail, W, la relation $W_k = 1000\, gW$; on en déduit $Ch_1 = 425 \times 1000 \times 9{,}809\, W$, ou : $Ch_1 = 4168800\, W$.

La quantité de chaleur équivalente à l'unité absolue de travail W est donc égale à une calorie (Ch_1) divisée

par 4168800 ; ce serait la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré centigrade $\frac{1000}{4168800}$ grammes d'eau, ou $0^{gr},0002399$. Telle est l'unité absolue de chaleur *.

30. — *Énergie.* — L'énergie d'un système quelconque est la quantité totale de force vive qu'il possède ou peut développer, ou bien, ce qui revient au même, la quantité de travail qu'il est susceptible de produire.

L'énergie peut être soit *actuelle* ou *cinétique*, soit *potentielle*.

Un mobile animé d'une certaine vitesse possède une quantité de force vive égale à la moitié du produit de sa masse par le carré de sa vitesse. Cette quantité représente l'énergie *actuelle* ou *cinétique* du mobile.

Si ce mobile est soumis à l'action d'une force, son *énergie potentielle* est la quantité de force vive que la force peut produire.

L'énergie potentielle peut se transformer en énergie actuelle, et réciproquement. Ainsi un corps qui tombe d'une certaine hauteur, en partant de l'état de repos, acquiert une force vive, ou une énergie actuelle, égale au produit de son poids par la hauteur de la chute, c'est-à-dire au travail de la force; avant de tomber il possédait une énergie potentielle, ou à l'état latent, résultant de sa situation, qui se transforme pendant la chute en énergie actuelle. Si un corps est, au contraire, lancé verticalement de bas en haut avec une certaine vitesse, il s'élève à une hauteur telle que le produit de son poids par l'espace parcouru jusqu'au moment de l'arrêt soit égal à la

* M. Joule a été conduit pour l'équivalent mécanique de la chaleur au chiffre 423,8 déduit d'expériences récentes sur la chaleur développée par les courants. L'unité absolue de chaleur serait alors la quantité de chaleur nécessaire pour élever d'un degré $0^{g},0002405$ d'eau.

CHAPITRE III.

GRANDEURS ÉLECTROSTATIQUES.

Hypothèses sur la nature de l'électricité.

33. — Pour expliquer les phénomènes électriques on a été conduit à admettre l'existence de deux fluides qui sont répandus dans tous les corps ; un petit espace qui en contient des quantités égales est à l'état neutre ; il est électrisé positivement ou négativement suivant que l'un ou l'autre des fluides est en excès, et cet excès constitue ce qu'on nomme son électricité libre.

Les particules d'un même fluide se repoussent tandis qu'elles attirent celles de l'autre fluide ; la force, répulsive ou attractive, est inversement proportionnelle au carré de la distance.

Dans les corps dits conducteurs, les fluides électriques peuvent passer d'une molécule matérielle à la suivante ; ils éprouvent, il est vrai, une résistance variable suivant la nature des corps, mais cette résistance, qui est une fonction de la vitesse, n'est pas absolue, et la plus petite force étrangère suffit pour produire le mouvement. Pour les corps dits isolants, les fluides électriques restent adhérents aux molécules matérielles.

En fait, il n'existe pas de corps absolument isolants, mais la résistance opposée au mouvement électrique peut être assez grande pour que la propagation n'ait lieu qu'avec une extrême lenteur.

Pour expliquer la propagation de l'électricité dans un conducteur, on admet qu'elle se produit par une série de décompositions et recompositions successives du fluide neutre, ce qui revient à considérer deux courants circulant en sens opposé ; l'un d'électricité positive et l'autre d'électricité négative.

Bien des objections ont été faites à l'hypothèse de deux fluides, qui d'ailleurs ne satisfait nullement l'esprit.

Beaucoup de physiciens reviennent à l'hypothèse de Francklin qui consiste à ne considérer qu'un seul fluide dont les molécules agissent par répulsion les unes sur les autres et par attraction sur la matière pondérable. Un atome matériel est à l'état neutre lorsque le rapport de sa masse à celle du fluide électrique qui l'entoure a une valeur déterminée ; il est électrisé positivement ou négativement suivant que ce rapport augmente ou diminue.

Cette hypothèse, combinée avec l'attraction matérielle, conduit aux lois élémentaires de l'électricité statique ; elle est en apparence plus rationnelle que celle des deux fluides, mais elle suppose des actions différentes entre les molécules électriques et les molécules matérielles dont on se rend difficilement compte.

L'une et l'autre de ces hypothèses entraînent la conception d'une action à distance ; or, si l'on comprend aisément la transmission du mouvement au contact, l'esprit éprouve une certaine répugnance à doter les molécules matérielles, électriques ou magnétiques d'une propriété qui leur donne la faculté d'agir à travers des espaces absolument neutres.

On est donc porté à chercher une explication des forces diverses de la nature par de simples transformations de mouvement. Les actions qui s'exercent à distance auraient pour intermédiaire le fluide qui remplit les espaces

interplanétaires aussi bien que les intervalles qui séparent les molécules des corps, dont les phénomènes calorifiques lumineux ont prouvé l'existence, et auquel les physiciens donnent le nom d'éther. L'électricité ne serait elle-même qu'un état particulier de l'éther, dont le mouvement dans les corps conducteurs produirait le courant électrique.

Quoi qu'il en soit, l'hypothèse des deux fluides électriques, si elle ne représente pas la véritable cause des phénomènes électriques, n'en est pas moins l'expression d'une loi élémentaire qui résulte de l'expérience, et à ce titre rien ne s'oppose à ce qu'elle soit conservée dans le langage et à ce qu'on lui applique l'analyse mathématique, pourvu qu'on n'attache pas aux mots électricité positive ou négative l'idée de deux fluides d'une nature spéciale, mais simplement celle de deux états particuliers des corps, états mesurables par leurs effets. De même que si l'on arrivait un jour à trouver la véritable cause de l'attraction universelle, on n'en appliquerait pas moins la loi de Newton au mouvement des corps célestes.

Quantité ou masse de l'électricité.

34. ***Définition.*** — Si l'on met en présence d'un corps électrisé A, isolé dans l'espace, successivement deux autres corps B et C de petite dimension chargés d'électricité de même nom, et si la force répulsive, mesurée au moyen d'une balance de torsion ou par toute autre méthode, est égale pour une même distance, on dit que les deux corps B et C ont une *charge* égale d'électricité ou qu'ils en possèdent des *quantités* égales. Si ces deux corps sont réunis en un seul, la force avec laquelle ils repoussent le corps A est double. Si un quatrième corps

électrisé produit sur A le même effet que les corps B et C réunis, on dira qu'il contient une quantité d'électricité double de celle qui se trouve sur chacun de ces derniers. Il en contiendra une quantité triple, quadruple, etc. si la force développée est triple ou quadruple, etc.

On a ainsi la *définition* de la quantité ou de la masse d'électricité que contient un corps, et un moyen de la mesurer quand l'unité a été fixée.

D'après la loi de Coulomb, deux masses q et q', de même fluide, situés à une distance l, se repoussent avec une force proportionnelle à $\frac{qq'}{l^2}$. En désignant par f cette force, on a $f = K\frac{qq'}{l^2}$, K étant un coefficient numérique constant.

Si les corps sont chargés d'électricités contraires, il y a attraction. La même formule s'applique en donnant à q et à q' un signe positif ou négatif, suivant que la masse électrique est elle-même positive ou négative, et en considérant la force f comme répulsive quand sa valeur est positive, et comme attractive quand sa valeur est négative.

L'unité absolue de quantité se déduit de cette formule en posant $q = q'$, $K = 1$, $f = 1$ et $l = 1$, car on en déduit $q = 1$.

L'unité absolue de quantité ou de masse électrique est donc la masse d'électricité positive qui, concentrée en un point, ou répandue sur un corps de très-petite dimension, repousse avec l'unité de force une quantité égale située à l'unité de distance. L'unité de force est l'unité absolue définie précédemment (n° 26) qui est égale à $0^{gr},1019$.

L'unité de quantité, Q, ainsi fixée, se nomme unité *absolue électro-statique*, afin de la distinguer des unités de

quantité que l'on déduit des phénomènes électro-dynamiques et électro-magnétiques; elle est liée aux unités mécaniques de force, F, et de longueur, L, par la relation $\frac{Q^2}{L^2} = F$, d'où $Q = L\sqrt{F}$. En remplaçant l'unité de force par sa valeur en fonction des trois unités fondamentales, $F = \frac{LM}{T^2}$, on obtient pour les dimensions de l'unité de quantité :

$$Q = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

Au moyen de ces dimensions, on trouve immédiatement ce que deviendrait l'unité de quantité si l'on passait d'un système d'unités fondamentales à un autre. Si, par exemple, on adoptait pour unité de longueur le centimètre au lieu du mètre, la grandeur Q_1 de l'unité de quantité deviendrait $Q_1 = \frac{(0,01)^{\frac{3}{2}}L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T} = 0,001 \times Q$.

35. — L'équation de Coulomb devient $f = \frac{qq'}{l^2}$; elle donne le moyen de déterminer en valeur absolue la quantité d'électricité répandue sur un corps conducteur.

Pour faire cette détermination, il faut d'abord se procurer une quantité d'électricité connue. On électrise à cet effet deux petites sphères métalliques égales qu'on sépare après les avoir mises en contact. L'électricité se trouve également répartie sur ces deux sphères dont on mesure la force répulsive à une distance donnée au moyen de la balance de torsion *, ou même avec une balance

* On sait que la balance de torsion de Coulomb se compose d'un levier horizontal suspendu à un fil fin. L'une des extrémités du levier supporte la boule électrisée, qui s'éloigne lorsqu'on lui présente un autre corps également électrisé, et prend une position telle qu'il y ait équilibre entre l'action du fil, qui, en se tordant, produit un couple de rota-

ordinaire, en suspendant l'une des sphères au-dessous de l'un des plateaux par un fil isolant, en plaçant l'autre sphère au-dessous et en ajoutant dans le plateau des poids pour rétablir l'équilibre (Balance de Harris). Si a est le poids exprimé en grammes qu'on ajoute, la force répulsive f sera, en unités absolues, égale à $a \times 0,1019$, et l'on aura $f = \frac{q^2}{l^2}$, d'où $q = l\sqrt{f}$, l étant la distance des sphères et q la quantité d'électricité répandue en chacune d'elle.

Connaissant la masse électrique répandue sur une petite sphère, on lui présente le corps électrisé dont on veut connaître la charge. Si ce corps est de petite dimension, et s'il produit sur la petite sphère, dont la charge q est connue, une force répulsive f' à une distance l', on aura $f' = \frac{qq'}{l'^2}$, ou $q' = \frac{f'l'^2}{q}$.

Lorsque le corps est de grande dimension, on peut déterminer sa charge par une série d'opérations successives; on le touche avec une petite sphère métallique qui enlève une partie de son électricité qu'on mesure; puis l'on répète l'opération après avoir déchargé la petite sphère, et l'on continue jusqu'à ce que la quantité d'électricité enlevée devienne négligeable. La somme des charges ainsi mesurée donne la charge totale. Ce procédé ne serait pas pratique; il existe d'autres méthodes plus simples pour déterminer en valeur absolue la charge d'un conducteur.

tion, et le moment de la force due à l'électricité qui agit à l'extrémité du levier. Le couple de torsion qui est proportionnel à l'angle décrit par le levier, dépend de la longueur et de la nature du fil. La valeur absolue de ce couple se détermine par l'expérience, d'après le nombre des oscillations qu'effectue le levier dans un temps déterminé. La force due à la répulsion électrique est égale au rapport du couple de torsion à la longueur du levier.

36. — *Densité électrique.* — Il résulte de l'expérience ainsi que de l'application de l'analyse à la loi élémentaire de Coulomb que toute l'électricité libre se porte à la surface des corps conducteurs, où elle est maintenue par l'air ou la matière isolante dont ils sont entourés. Elle ne se répartit uniformément sur la surface que lorsque le conducteur est sphérique ; sur les corps de forme irrégulière, la charge est plus grande aux points où la courbure est plus grande. On peut trouver par le calcul la loi de cette distribution dans quelques cas particuliers ; on peut également l'obtenir par l'expérience au moyen d'un petit disque de clinquant, nommé plan d'épreuve, qu'on applique aux divers points du corps électrisé. Le disque fait pendant un instant partie de la surface du conducteur essayé, et, quand on l'enlève, il emporte avec lui une charge qui correspond à celle de la surface qu'il recouvrait et qu'on peut mesurer.

La charge électrique qui est répandue sur l'unité de surface d'un corps, dans le cas d'une distribution uniforme, ou plus généralement le rapport de la charge répandue sur une petite surface à l'étendue de cette surface, se nomme la ***densité électrique*** ou l'***épaisseur de la couche électrique.***

L'unité de densité électrique est celle d'une masse électrique égale à 1 qui serait répandue sur l'unité de surface. Si l'on représente l'unité de densité par D, on a $D = \frac{Q}{S}$, Q étant l'unité de masse électrique et S l'unité de surface.

En remplaçant Q par $\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$ et S par L^2, on a, pour les dimensions de D, $D = \frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}} T}$.

Il est une autre cause que la forme irrégulière des corps qui modifie la distribution de l'électricité à leur surface, c'est l'inflence des conducteurs voisins dont le fluide neutre décomposé réagit sur le fluide libre du corps électrisé, phénomène qui constitue la condensation électrique.

L'électricité répandue sur un conducteur exerce en chaque point de la surface une force normale à cette surface et qui, rapportée à l'unité de masse électrique, se nomme *tension*.

Potentiel électrique.

37. — Le *potentiel électrique* est une qualité spéciale de l'électricité qui correspond à la force élastique des gaz, à la pression hydro-statique des liquides et à la température des corps dans la théorie de la chaleur. C'est en vertu de la différence des potentiels de deux points que l'électricité se transmet de l'un à l'autre. Deux corps ont le même potentiel s'il ne se produit pas entre eux de mouvement électrique quand on les réunit par un fil conducteur.

Le potentiel est essentiellement distinct de la densité de l'électricité à la surface des conducteurs et de la pression, ou *tension*, qu'exerce le fluide électrique contre les corps isolants. Ainsi, bien que la densité électrique soit inégale aux divers points d'un ellipsoïde, si on le met en communication avec une boule métallique au moyen d'un long fil conducteur, la boule prend toujours une même charge, quel que soit le point touché de l'ellipsoïde. Si l'on considère deux sphères dont l'une ait un rayon double du rayon de l'autre et une charge électrique quadruple, la densité électrique est la même à la surface des

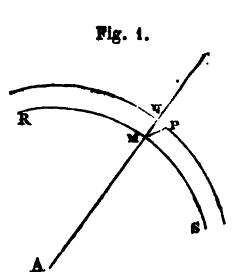
deux sphères, et cependant, quand on les réunit par un fil conducteur, une partie du fluide de la grande sphère passe sur la plus petite, parce qu'elles n'ont pas le même potentiel : deux sphères électrisées pour avoir des potentiels égaux doivent, en effet, posséder des charges proportionnelles à leurs rayons et non aux carrés des rayons.

Dans la plupart des traités d'électricité on donne encore le nom de tension à la propriété qui nous occupe : le même mot désignant deux grandeurs différentes, il en résulte des confusions qu'on évite en adoptant le nom de *potentiel*, introduit pour la première fois en 1828, dans l'étude de l'électricité, par George Green *.

Pour bien faire comprendre le rôle du potentiel électrique, il est nécessaire d'entrer dans quelques détails et d'en donner une définition précise **.

38. — *Théorie élémentaire du potentiel.* — Considérons un point A (*fig.* 1), auquel est concentrée une masse q d'électricité ; cette masse agit dans toutes les directions, et si, en un point M situé à une distance AM $= r$, se trouve une autre masse électrique q' du même fluide, cette dernière est repoussée par la masse q dans la direction MX avec une force égale à $\frac{qq'}{r^2}$.

Fig. 1.



Supposons que la masse q' concentrée au point M soit

* *Essai sur les applications de l'analyse mathématique à la théorie de l'électricité et du magnétisme*, par Georges Green. — Nottingham, 1828.

** Nous avons évité toute introduction du calcul infinitésimal dans ces considérations sommaires que nous avons cru devoir donner pour ceux de nos lecteurs qui ne sont pas familiarisés avec la notion du potentiel.

égale à l'unité de quantité d'électricité positive, ou de masse électrique, la force deviendra

$$f=\frac{q}{r^2};$$

elle est la même pour tous les points de la sphère RMS décrite du point A comme centre avec le rayon r.

Prenons un point N situé à une très-petite distance $d=$MN du point M, sur le prolongement de la ligne AM; sa distance r' au point A sera $r'=r+d$.

La théorie du potentiel repose sur l'observation suivante :

Si de l'expression $\frac{q}{r}$ on retranche $\frac{q}{r+d}$, on trouve

$$\frac{q}{r}-\frac{q}{r+d}=\frac{q}{r(r+d)}\times d$$

ou

$$\frac{\frac{q}{r}-\frac{q}{r+d}}{d}=\frac{q}{r(r+d)}.$$

Lorsque d est très-petit par rapport à r, $\frac{q}{r(r+d)}$ sensiblement égal à $\frac{q}{r^2}$, c'est-à-dire à la grandeur de la force f*.

On peut donc poser

$$\frac{\frac{q}{r}-\frac{q}{(r+d)}}{d}=\frac{q}{r^2}=f.$$

On nomme potentiel d'un point M, *soumis à l'action d'une masse électrique* q *située au point* A, *le rapport* $\frac{q}{r}$

* La proposition est rigoureusement exacte lorsque la distance d est infiniment petite.

de la masse agissante q, *à la distance qui sépare les deux points.* En désignant par V ce potentiel *, $V = \frac{q}{r}$.

Le potentiel V' au point N est : $V' = \frac{q}{r+d}$.

L'équation précédente devient

$$\frac{V - V'}{d} = f,$$

et peut s'énoncer ainsi :

La force f, avec laquelle l'unité de quantité d'électricité supposée concentrée au point M serait repoussée par la masse q, située au point A, est égale au rapport de la différence des potentiels des deux points très-voisins M et N à la distance de ces deux points.

L'équation $\frac{V - V'}{d} = f$ peut se mettre sous la forme

$$V - V' = d \times f.$$

$d \times f$ est le travail de la force f, c'est-à-dire le travail qu'effectuerait l'unité de quantité d'électricité repoussée par le point A pour se transporter de M en N, ou l'augmentation de force vive qu'elle acquerrait si elle n'éprouvait aucune résistance; ce travail est égal à la différence V — V' des potentiels des deux points M et N.

39. — Soit un autre point P, situé également à la distance $r' = r + d$ de A, mais en dehors de la ligne AX et e la distance MP. Le potentiel du point P est le même que celui du point N et égal à $\frac{q}{r+d} = V'$.

Si l'on désigne par f_1 la composante suivant la direc-

* On a l'habitude de représenter le potentiel par la lettre V, c'est pourquoi nous adoptons cette notation, bien que nous ayons déjà désigné par la même lettre l'unité absolue de vitesse.

tion MP de la force f, qui agirait sur l'unité de masse concentrée en M, on a $f_1 = f \cos \text{NMP}$, ou $f = \frac{f_1}{\cos \text{NMP}}$; d'un autre côté $\text{MN} = d = e \cos \text{NMP}$.

En substituant ces valeurs de f et de d dans l'équation $\frac{V - V'}{d} = f$, elle devient

$$\frac{V - V'}{e} = f_1$$

ou

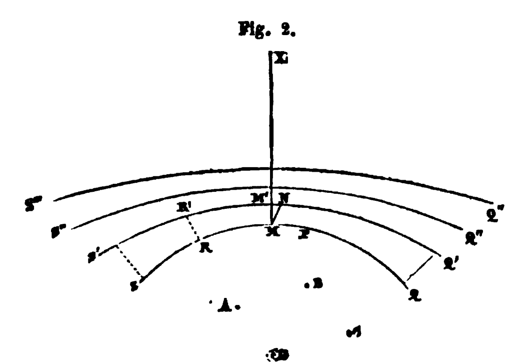
$$V - V' = e \times f_1.$$

Ainsi la composante f_1 est égale au rapport de la différence des potentiels des deux points M et P à leur distance e, et le travail que développerait l'unité de quantité d'électricité pour passer du point M au point P, est encore $V - V'$.

Si le fluide concentré en A était négatif, le potentiel aux points M et P serait négatif, ainsi que le travail $e \times f_1$; et, en effet, la force exercée sur l'unité de quantité d'électricité positive placée en M serait attractive.

40. — Imaginons maintenant un certain nombre de masses électriques q, q', q'', q''', etc., concentrées en divers points A, B, C, D, etc. (*fig.* 2).

Fig. 2.



Le potentiel en un point quelconque de l'espace, M par exemple, est la somme des potentiels dus à chacune des masses q, q', q'', etc.

r, r', r'', r''', étant les distances du point M aux points A, B, C, D, le potentiel V au point M est

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \frac{q'''}{r'''} + \text{etc.}$$

On peut donc définir le potentiel électrique comme étant une expression mathématique dont la valeur en chaque point de l'espace est égale à la somme des rapports qu'on obtient en divisant les diverses masses électriques que contient cet espace par leur distance au point considéré. Cette somme se met ordinairement sous la forme

$$V = \sum \frac{q}{r}.$$

Il est facile de connaître le potentiel en un point lorsqu'on connaît la grandeur et la position des masses électriques situées dans le voisinage. Pour celles qui sont à une très-grande distance, leur influence est, en général, négligeable.

L'électricité, au lieu d'être concentrée en un certain nombre de points isolés, occupe ordinairement un volume plus ou moins étendu. Pour obtenir le potentiel en un point déterminé on divise le volume occupé par le fluide en une infinité d'éléments ; si l'on connaît la loi de la distribution électrique, c'est-à-dire la densité de l'électricité en chaque point, on en déduit la masse qui correspond à chaque élément et la somme des rapports $\frac{q}{r}$ étendue au volume entier donne la valeur au potentiel.

La question revient à un problème d'analyse plus ou moins compliqué *.

Le point dont on cherche le potentiel peut d'ailleurs être extérieur aux masses électriques ou intérieur; c'est ainsi qu'on peut déterminer le potentiel en un point d'un corps conducteur quand on connaît la distribution de l'électricité à sa surface.

On peut même obtenir aussi le potentiel en un point de la masse électrique elle-même, bien que sa distance aux points voisins soit infiniment petite, car le rapport $\frac{q}{r}$ ne devient jamais infini **.

41. — Revenons à la figure 2 dans laquelle quatre masses électriques q, q', q'' et q''' sont concentrées aux points A, B, C et D. Le potentiel V du point M est

$$V = \frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \frac{q'''}{r'''};$$

pour un point voisin N, dont les distances aux points A, B, C, D sont $r + d$, $r' + d'$, $r'' + d''$, $r''' + d'''$, le potentiel V' devient

$$V' = \frac{q}{r + d} + \frac{q'}{r' + d'} + \frac{q''}{r'' + d''} + \frac{q'''}{r''' + d'''}.$$

* Si a, b et c sont les coordonnées du point dont on cherche le potentiel, x, y, z les coordonnées d'un point du volume occupé par l'électricité, et δ la densité du fluide en ce point, qui est une fonction connue de x, y et z, le potentiel V est donné par l'équation

$$V = \iiint \frac{\delta\, dx\, dy\, dz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

qu'on intègre dans toute l'étendue du volume.

** On démontre au contraire que le rapport $\frac{q}{r}$ correspondant à l'espace infiniment petit qui entoure un point est nul, ce qui se comprend aisément, car la masse q est proportionnelle au volume qui est un infiniment petit du troisième ordre.

Si l'on suppose encore l'unité de masse électrique concentrée au point M, elle sera soumise à une force qui sera la résultante des actions répulsives ou attractives de toutes les masses q, q', q'', q''', et la composante de cette résultante suivant la direction MN sera la somme des composantes partielles.

On a vu qu'en désignant par e la distance MN, la composante f_1 de la force due à la masse q concentrée au point A est

$$f_1 = \frac{\frac{q}{r} - \frac{q}{r+d}}{e},$$

a composante f'_1 due à la masse q' du point B est

$$f_1' = \frac{\frac{q'}{r'} - \frac{q'}{r'+d'}}{e}$$

et ainsi de suite.

En faisant la somme, on a pour la composante F_1 de la résultante suivant MN

$$F_1 = \frac{\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \frac{q'''}{r'''} - \frac{q}{r+d} - \frac{q'}{r'+d'} - \frac{q''}{r''+d''} - \frac{q'''}{r'''+q'''}}{e}$$

ou

$$F_1 = \frac{V - V'}{e} \quad \text{et} \quad e \times F_1 = V - V'.$$

La composante de la force qui agirait en un point quelconque sur l'unité de quantité d'électricité est, comme dans le cas d'une seule masse agissante, égale à la diminution qu'éprouve le potentiel en passant de ce point à un autre très-voisin, divisée par la distance des deux points, et le travail qu'effectuerait l'unité de masse électrique pour passer de l'un à l'autre de ces points est

égal à la différence de leurs potentiels. Le signe de $V - V'$ fait d'ailleurs connaître la direction de la force.

42. — ***Surfaces équipotentielles, lignes de force, champ électrique.*** — Les points pour lesquels la somme $\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} +$ etc., a une même valeur, ont le même potentiel et forment une surface continue qu'on nomme ***surface équipotentielle*** ou ***surface de niveau***, dont l'équation est

$$\frac{q}{r} + \frac{q'}{r'} + \frac{q''}{r''} + \text{etc.} = C$$

ou

$$V = C.$$

C étant une constante qui représente la valeur du potentiel en un point quelconque de la surface.

Si l'on fait varier C, on a une autre surface équipotentielle différente de la première et dont l'équation est $V = C'$. Pour une troisième valeur C'' de la constante, on aura une nouvelle surface équipotentielle $V = C''$.

On obtient ainsi une série de surfaces SQ, S'Q', S''Q'', S'''Q''', etc. (*fig.* 2), dont chacune correspond à une valeur spéciale de la constante C.

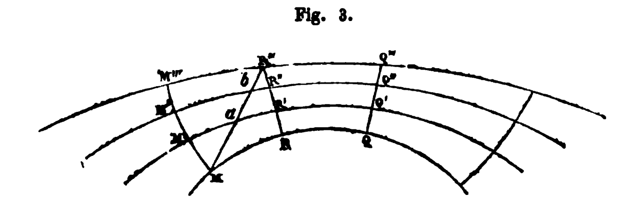
La composante de la force * suivant la ligne qui réunit deux points très-voisins situés à une distance e l'un de l'autre a pour valeur $F_1 = \frac{V - V'}{e}$. Si ces deux points, M et P, font partie d'une même surface équipotentielle, $V = V'$, la composante dans la direction MP est nulle. On en conclut que la force exercée par les masses agissantes A, B, C, D en un point donné est normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point.

* Par force on entend toujours celle qui agirait sur l'unité de masse électrique concentrée au point que l'on considère.

En M elle a la direction MM′, en R la direction RR′, en Q la direction QQ′, etc.; sa valeur absolue au point M est $\frac{V-V'}{MM'}$, au point R $\frac{V-V'}{RR'}$, etc., V et V′ étant les potentiels des deux surfaces de niveau SQ et S′Q′ situées à une distance infiniment petite l'une de l'autre, MM′ et RR′ les longueurs des normales comprises entre ces deux surfaces.

43. — Considérons encore une série de surfaces équipotentielles rapprochées les unes des autres, MRQ, M′R′Q′, M″R″Q″, M‴R‴Q‴ (*fig.* 3).

Fig. 3.



Au point M la force agit suivant la direction MM′ normale à la surface MRQ; au point M′ elle a une direction M′M″ normale à la surface M′R′Q′; en M″ une direction M″M‴ normale à M″R″Q″, et ainsi de suite.

La ligne MM′M″ M‴ qui représente en chacun de ses points la direction de la force se nomme *ligne de force.* RR′R″R‴, QQ′Q″Q‴, etc., sont des lignes de force. En chaque point de l'espace il en passe une.

Dans le cas d'une seule masse électrique agissante, les surfaces équipotentielles sont des sphères décrites de ce point comme centre et les lignes de force sont les rayons.

Un espace soumis à l'action de masses électriques est appelé *champ électrique.* L'intensité du champ en un

point donné est la grandeur de la force qui agirait sur l'unité de quantité d'électricité positive concentrée en ce point.

44. — *Définition du potentiel par le travail.* — Le travail effectué par l'unité de masse électrique pour passer d'un point à un autre infiniment rapproché est égal à la différence des potentiels de ces deux points. La même loi s'applique quelle que soit la distance des deux points et le trajet parcouru par la masse électrique. Supposons en effet qu'elle passe du point M au point R‴ (*fig.* 3); on pourra diviser l'espace parcouru en éléments infiniment petits M*a*, *ab*, *b*R‴. Le travail de la force de M à *a* est égal à la différence des potentiels des points M et *a*; de *a* à *b* le travail est égal à la différence des potentiels des points *a* et *b*, etc. : le travail total de M à R‴ est donc égal à la différence des potentiels des deux points extrêmes M et R‴, ou

$$W = V - V_1,$$

W étant le travail, V le potentiel de M et V_1 celui de R‴.

A une distance infiniment grande des masses agissantes, les rapports $\frac{q}{r}$, $\frac{q'}{r'}$, etc. sont infiniment petits, e potentiel V_1 peut être considéré comme nul, et l'on a $W = V$. On peut donc dire que le potentiel électrique en un point est égal au travail que produirait l'unité de quantité d'électricité en se transportant, sous l'influence des masses électriques, de ce point à une distance infinie, ou au travail qu'il faudrait développer pour vaincre la répulsion électrique et amener l'unité de quantité au point considéré en partant d'un point situé à

une distance infiniment grande. C'est ainsi qu'on définit quelquefois le potentiel *.

45. — *Effet de la différence de potentiel entre deux points voisins.* — Lorsque deux points voisins ont un potentiel différent, il se manifeste, ainsi qu'on vient de le voir, suivant la ligne qui réunit ces deux points, une force qui, appliquée à l'unité de masse électrique, est égale à la différence $V - V'$ des potentiels des deux points divisée par leur distance e, ou à $\frac{V-V'}{e}$. Si à l'un des points se trouve une masse q' d'électricité, elle est soumise, dans la direction de l'autre point, à une force égale à

$$\frac{q'(V-V')}{e}.$$

Les deux fluides sont répandus dans tous les corps en quantité égale. Si donc entre deux points voisins il existe une différence de potentiel, la force qui en est la conséquence, décompose le fluide neutre; le fluide positif est repoussé dans la direction de la force et le fluide négatif tend à se mouvoir en sens contraire. Lorsque ces deux points font partie d'un corps isolant, il ne se produit aucun mouvement électrique, mais, si l'espace où ils se trouvent est conducteur, les deux fluides se propagent en sens opposé. Il en résulte que l'équilibre électrique ne peut exister dans un corps conducteur que si tous ses points ont le même potentiel **.

* En partant de cette définition on arrive naturellement à la même expression du potentiel $V = \sum \frac{q}{r}$.

La théorie du potentiel s'applique à toutes les forces centrales (n° 31), telles que la gravitation universelle, les forces magnétiques, etc. Dans le cas de la pesanteur les lignes de force sont des lignes verticales et les surfaces équipotentielles des plans horizontaux.

** La surface extérieure des corps conducteurs est donc toujours une

Deux corps conducteurs que l'on réunit par un fil métallique ne forment plus qu'un seul et même conducteur et par conséquent doivent se mettre au même potentiel. Le corps dont le potentiel est le plus élevé perd une certaine quantité de son fluide positif, et l'autre une quantité égale de fluide négatif, ce qui donne lieu dans le fil à un mouvement électrique qui dure jusqu'à ce que l'équilibre soit établi de nouveau.

La terre peut être considérée comme un immense conducteur dont le potentiel est nul : un corps électrisé prend donc un potentiel nul quand on le met en communication avec le sol. Le mouvement du fluide positif dans le fil de communication a lieu du corps à la terre ou réciproquement suivant que le potentiel du corps était préalablement positif ou négatif.

46. — *Potentiel des corps conducteurs.* — Lorsqu'un conducteur électrisé est isolé dans l'espace et que les corps qui l'environnent sont assez éloignés pour ne pas avoir d'influence, son potentiel dépend uniquement de la charge électrique répandue à sa surface. Le potentiel étant le même en tous les points du conducteur, pour avoir sa valeur il suffit de connaître celle d'un point quelconque.

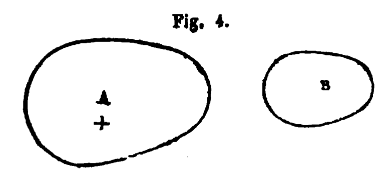
Pour une sphère métallique électrisée, le potentel au centre est égal au quotient $\frac{q+q'+q''\ldots}{r}$ de la somme de toutes les masses électriques situées sur sa surface divisée par le rayon r de la sphère. La somme $q+q'+q''\ldots$ etc. représente la charge totale Q; le potentiel V d'une sphère est donc $V=\frac{Q}{r}$, il est proportionnel à sa charge et en

surface équipotentielle ou de niveau, et par conséquent la force électrique lui est normale.

raison inverse de son rayon. Une sphère de rayon égal à l'unité et dont la charge est l'unité de masse électrique a un potentiel égal à l'unité.

Ordinairement le potentiel d'un corps électrisé dépend non-seulement de sa charge, mais aussi de celle des corps voisins. Ainsi le potentiel d'un corps A (*fig.* 4) électrisé po-

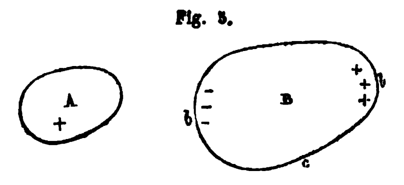
Fig. 4.



sitivement est égal à la somme $\sum \frac{q}{r}$ qui correspond à l'électricité répandue sur sa surface augmentée de la somme $\sum \frac{q'}{r'}$ due aux masses électriques qui se trouvent sur les corps environnants. Si un autre corps B électrisé positivement est placé dans le voisinage, le potentiel de A est plus grand que si le corps B est enlevé. Quand on rapproche B de A, le potentiel des deux corps augmente, car la somme $\sum \frac{q}{r} + \sum \frac{q'}{r'}$ devient plus grande. Si, au contraire, B était électrisé négativement, le potentiel A diminuerait à mesure que B s'en rapprocherait.

Lorsqu'un corps B (*fig.* 5) à l'état neutre est amené

Fig. 5.

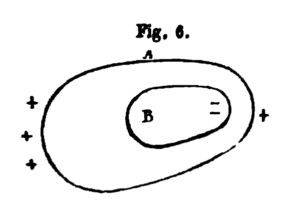


dans le voisinage d'un corps électrisé A, son fluide neutre

est décomposé par influence; le fluide négatif, c'est-à-dire de nom contraire à celui de A, se porte du côté *b*, et une égale quantité de fluide positif s'accumule en *b'*. Le potentiel de A diminue, et celui de B, qui était d'abord nul, prend une certaine valeur positive. Si l'on met ce dernier corps en communication avec la terre au moyen d'un fil conducteur, son électricité positive s'écoule dans le sol, quel que soit d'ailleurs le point touché avec le fil, *b'*, *c*, ou *b*; son potentiel devient nul et celui de A diminue de nouveau.

Un corps conducteur peut donc contenir les deux fluides libres à ses deux extrémités, bien que son potentiel soit constant, ou ne contenir que du fluide négatif et avoir un potentiel nul. On peut même imaginer un conducteur chargé uniquement de fluide négatif et dont le potentiel soit positif. C'est ce qui pourrait arriver si l'on plaçait un corps B (*fig.* 6) préalablement chargé de fluide négatif dans un conducteur creux A électrisé positivement. La charge du conducteur extérieur peut être assez grande pour que le potentiel de B soit positif, et, si l'on met ce dernier corps en communication avec le sol, ce sera l'électricité positive repoussée par A qui s'écoulera, et non le fluide négatif dont il était primitivement chargé.

Fig. 6.



47. — *Équilibre électrique.* — Lorsque plusieurs corps conducteurs électrisés, isolés les uns des autres, sont amenés en présence, l'électricité qu'ils contiennent, ainsi que celle qui est due à la décomposition par influence du fluide neutre, se répartissent à leur surface de façon à constituer un état d'équilibre électrique qui persiste tant

que la position relative des divers corps n'est pas modifiée. Il n'existe qu'une seule distribution qui satisfasse à la loi d'équilibre *.

Le calcul de la distribution, c'est-à-dire de la densité de l'électricité aux divers points est un problème extrêmement compliqué, qui ne peut être complétement résolu que dans quelques cas particuliers.

La distribution doit satisfaire à la condition que dans toute l'étendue de chacun des conducteurs le potentiel soit constant, c'est-à-dire que la somme $\sum \frac{q}{r}$ ait une même valeur.

En outre, pour les corps entièrement isolés, la somme algébrique des quantités d'électricité (positive et négative) répandues à leur surface doit être égale à la charge qu'ils possédaient préalablement; pour les corps qui sont en communication avec une source électrique et dont le potentiel est maintenu constant la charge est indéterminée, mais la somme $\sum \frac{q}{r}$ doit être dans toute l'étendue de ces corps égale au potentiel de la source.

Une source électrique joue le rôle d'un vaste réservoir d'électricité, tel par exemple qu'une grande sphère électrisée située à une distance assez grande pour ne pas avoir d'influence directe; ce réservoir, mis en communication par un long fil métallique avec un conducteur, fournit ou absorbe, sans que sa charge soit sensiblement modifiée, la quantité d'électricité nécessaire pour maintenir le potentiel du conducteur constant et égal à son propre potentiel. La terre est elle-même une source élec-

* Ce principe, qui paraît évident *à priori*, peut être démontré par l'analyse.

trique qui communique un potentiel nul à tous les corps avec lesquels elle est en communication.

48. — *Unité absolue de potentiel.* — L'unité absolue de potentiel est, par définition (n° 38), celui d'un point qui serait situé à l'unité de distance d'une masse électrique égale à l'unité de quantité, ou encore celui d'une sphère conductrice qui aurait un rayon égal à l'unité de longueur et dont la charge serait égale à l'unité de quantité d'électricité (n° 46).

Q étant l'unité de quantité d'électricité, L l'unité de longueur, et V l'unité de potentiel, on a $V = \frac{Q}{L}$; en remplaçant Q par sa valeur en fonction des unités fondamentales (n° 34), $Q = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$, on trouve

$$V = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}:$$

ce sont les dimensions du potentiel.

Bien qu'il soit défini comme une expression mathématique, le potentiel correspond évidemment à une situation particulière du fluide qui se trouve à l'état libre ou à l'état neutre dans les corps, situation qui est caractérisée par une tendance plus ou moins grande au mouvement. Un exemple remarquable est celui de deux corps métalliques placés à l'état neutre au centre de deux sphères inégalement électrisées; ils ne contiennent l'un et l'autre aucune trace de fluide libre, et cependant si on les met en communication par un fil conducteur, une certaine quantité d'électricité positive passe du corps dont le potentiel est le plus élevé à l'autre.

Quel est l'état du fluide neutre doué d'un potentiel? On ne saurait le dire, puisque nous ignorons en quoi consiste

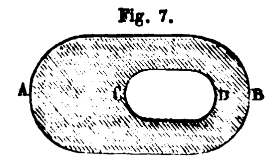
l'électricité ; on peut cependant l'assimiler à celui d'un liquide incompressible qui serait renfermé dans un vase à parois élastiques et soumis à une certaine pression. La nature du liquide ne paraît pas modifiée quand on augmente la pression, et cependant il jouit d'une propriété nouvelle, car si l'on met en communication par un tuyau deux vases semblables dont les liquides sont soumis à des pressions différentes, il s'établit entre eux un équilibre hydrostatique, et une petite partie du liquide passe de l'un des vases dans l'autre.

Condensation.

49. — *Principes généraux.* — Dans l'étude des phénomènes de condensation on envisage un cas particulier de la distribution électrique, celui où le champ électrique est formé seulement de deux conducteurs dont l'un est complétement enveloppé par l'autre. Nous rappellerons d'abord quelques principes généraux.

Puisque dans une distribution électrique il n'existe pas de fluide libre à l'intérieur des conducteurs, on ne change rien à l'équilibre d'un système en enlevant une partie telle que CD (*fig.* 7) de l'un quelconque d'entre eux, de façon à former une cavité. La situation électrique n'est pas modifiée et le potentiel $\sum \frac{q}{r}$ reste le même en tous les points de l'espace extérieur aussi bien qu'à l'intérieur de la cavité elle-même. On en conclut que la distribution électrique est la même pour des corps creux que pour des corps pleins, que le potentiel en tous les points d'un espace complétement

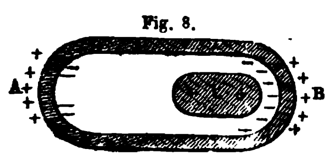
Fig. 7.



entouré par une enveloppe métallique est le même que celui de l'enveloppe, et qu'il ne peut y avoir de fluide libre sur la surface interne, s'il n'existe aucune masse électrique à l'intérieur.

Considérons maintenant un corps C (*fig.* 8) électrisé, positivement par exemple, placé dans une enveloppe conductrice AB de forme quelconque. Le fluide neutre de cette enveloppe est décomposé par influence. Une quantité d'électricité égale à celle de C, et de signe contraire, est attirée sur la face interne de AB; l'autre fluide est repoussé à l'extérieur, il s'ajoute à la charge de l'enveloppe ou est absorbé suivant que cette dernière est isolée ou en communication avec une source électrique qui maintienne constant son potentiel. Il en serait de même si, au lieu d'un seul corps électrisé C, il en existait plusieurs. L'enveloppe prend toujours sur sa surface interne une charge totale égale et de signe contraire à la somme des masses électriques situées à l'intérieur, et l'on peut dire d'une façon générale qu'il ne peut exister d'électricité libre sans qu'il se développe dans l'espace environnant, à une distance plus ou moins grande, une quantité égale de fluide contraire.

Fig. 8.



Le potentiel V en un point quelconque de l'espace est

$$V = \sum \frac{q}{r} + \sum \frac{q'}{r'}.$$

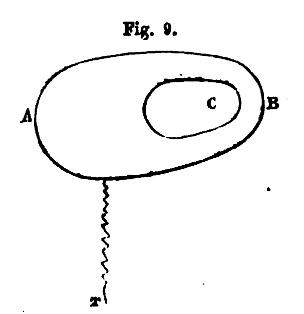
$\sum \frac{q}{r}$ étant le potentiel produit par le fluide positif de C (*fig.* 8) et par le fluide négatif de la surface intérieure de l'enveloppe, $\sum \frac{q'}{r'}$ celui qui est dû au fluide situé à

prend pour le potentiel, ce qui revient à considérer comme nul le potentiel terrestre.

51. — Les expériences délicates d'électricité sont souvent troublées par la présence des corps voisins qui peuvent être accidentellement électrisés; on se met à l'abri de ces influences étrangères en entourant les appareils d'une enveloppe métallique munie d'ouvertures pour permettre de faire les observations, ou simplement d'une cage en fils de fer qu'on met en communication avec la terre. Le potentiel de l'enveloppe est nul et les corps qui l'entourent sont sans influence sur l'intérieur.

52. — *Condensateurs, capacité électro-statique.* — Un corps conducteur entouré d'une enveloppe métallique constitue un condensateur. Le corps C (*fig.* 8 et *fig.* 9) forme l'armature intérieure, et l'enveloppe AB l'armature extérieure.

Fig. 9.



Les potentiels V et V' des deux armatures doivent satisfaire à l'équation $V = \sum \frac{q}{r} + V'$ qu'on peut mettre sous la forme

$$V - V' = \sum \frac{q}{r} - \sum \frac{q'}{r'}.$$

$\sum \frac{q}{r}$ étant le potentiel produit par l'électricité de l'armature intérieure C en un point quelconque de cette armature, et $\sum \frac{q'}{r'}$ le potentiel produit au même point par le fluide répandu sur la surface interne de l'armature extérieure AB, en prenant sa valeur arithmétique.

Pour une situation donnée des armatures, le second terme de l'équation est proportionnel à leur charge totale, qui est égale et de signe contraire, Q et —Q.

En effet, si l'on suppose que la densité de l'électricité varie en tous les points suivant une même proportion, qu'elle devienne par exemple n fois plus grande, l'équilibre électrique subsistera évidemment; chacun des termes élémentaires $\frac{q}{r}$, $\frac{q'}{r'}$, etc. deviendra n fois plus grand, ainsi que la somme $\sum \frac{q}{r} - \sum \frac{q'}{r'}$. La charge totale variera d'ailleurs dans la même proportion.

On peut donc poser

$$V - V' = \frac{Q}{S}.$$

S étant un coefficient constant pour chaque condensateur, et qui dépend de la forme, de l'étendue et de la position relative des armatures.

On met ordinairement l'armature extérieure en communication avec la terre et l'on a pour le potentiel de l'armature intérieure

$$V = \sum \frac{q}{r} - \sum \frac{q'}{r'}$$

ou

$$V = \frac{Q}{S},$$

Cette équation donne, lorsque S est connu, le potentiel de l'armature intérieure, pour une charge connue Q d'électricité. Si cette armature est en communication avec une source électrique qui lui communique un potentiel connu V, la charge Q est égale à VS.

53. — Le coefficient S se nomme la *capacité électrostatique* d'un condensateur. Sa valeur est d'autant plus

grande que les deux armatures sont plus étendues et qu'elles sont plus rapprochées l'une de l'autre; elle est donnée par l'expression $S = \frac{Q}{V}$, c'est-à-dire qu'elle est égale au rapport de la charge de l'armature intérieure d'un condensateur à son potentiel.

L'unité absolue de capacité électro-statique est celle d'un condensateur dont l'armature intérieure aurait l'unité de potentiel pour une charge égale à l'unité de quantité d'électricité, ou qui, mis en communication avec une source électrique ayant l'unité de potentiel, prendrait une charge égale à l'unité de quantité.

On obtient les dimensions de l'unité de capacité électro-statique, en remplaçant dans l'équation $S = \frac{Q}{V}$, Q et V par leurs valeurs en fonction des unités fondamentales, $Q = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$ et $V = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$; on trouve ainsi

$$S = L.$$

La capacité électro-statique est donc représentée par une longueur.

Si l'on suppose l'armature extérieure d'un condensateur très-éloignée de l'armature intérieure, on se trouve dans le cas d'un corps conducteur complétement isolé dans l'espace et entouré seulement par l'atmosphère ou par les parois de la chambre où il se trouve. Les distances r' du corps à l'enveloppe extérieure sont très-grandes et l'on peut négliger le terme $\sum \frac{q'}{r'}$ dans l'expression du potentiel $V = \sum \frac{q}{r} - \sum \frac{r'}{r'}$, qui devient alors $V = \sum \frac{q}{r}$.

Le rapport entre la capacité d'un condensateur et la capacité qu'il aurait si l'armature extérieure était enlevée est le *pouvoir condensant;* il est égal au rapport $\frac{Q}{Q_1}$ des quantités d'électricité que prendrait le condensateur avec et sans armature pour un même potentiel. Remarquons d'ailleurs que lorsque l'armature extérieure est une feuille métallique très-mince, sa charge est sensiblement la même lorsque cette armature est isolée ou lorsqu'elle est enlevée.

Pour déterminer la capacité électro-statique d'un condensateur, il faut connaître le potentiel V de l'armature intérieure qui correspond à une charge connue Q; le rapport $\frac{Q}{V}$ donne la valeur de la capacité.

C'est ordinairement par l'expérience qu'on trouve Q et V, mais lorsque la forme géométrique du condensateur permet de calculer la distribution de l'électricité, ainsi que la somme $\sum\frac{q}{r}-\sum\frac{q'}{r'}$ pour un des points de l'armature intérieure, on en déduit directement le potentiel V et par suite la capacité électro-statique.

C'est ce qui a lieu lorsque, par suite de la forme régulière des armatures, la densité doit être partout la même. Les condensateurs sphériques sont les seuls qui remplissent complétement cette condition; on les nomme *condensateurs absolus.*

54. — *Condensateurs absolus.* — Une sphère isolée, de rayon r, assez éloignée des corps environnants pour être soustraite à leur influence, et dont la charge électrique est Q, a un potentiel V égal à $\frac{Q}{r}$ (n° 46), d'où l'on déduit pour

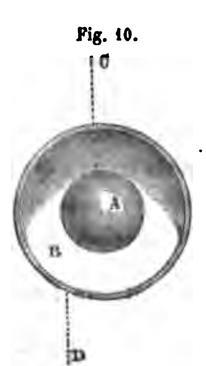
la capacité électro-statique

$$S = \frac{Q}{V} = r.$$

La capacité électro-statique d'une sphère est donc exprimée en unités absolues par son rayon. L'unité de capacité est celle d'une sphère dont le rayon serait égal à l'unité de longueur, et le nombre qui exprime en unités absolues la capacité d'un condensateur quelconque représente le rayon de la sphère qui offrirait une égale capacité.

55. — Deux sphères concentriques A et B (*fig.* 10) dont l'une, la sphère extérieure B, est reliée avec la terre par un fil D, tandis que la sphère intérieure A peut être mise en communication avec une source électrique au moyen d'un petit fil conducteur isolé C qui traverse l'autre sphère, forment aussi un condensateur absolu.

Fig. 10.



La sphère intérieure possédant une charge Q, il se développe par induction une charge égale et de signe contraire qui se distribue régulièrement sur la surface intérieure de l'autre sphère.

Le potentiel V de la sphère A est égal à $\frac{Q}{r} - \frac{Q}{R}$, r étant le rayon de la petite sphère et R celui de la grande, ou

$$V = Q\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right),$$

ce qui donne pour la capacité S du condensateur

$$S = \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{r} - \frac{1}{R}} = \frac{Rr}{R - r}.$$

Si la sphère intérieure avait pour rayon $0^m,50$ et la grande $0^m,60$, la capacité électro-statique serait

$$S = \frac{0^m,60 \times 0^m,50}{0^m,10} = 3,$$

tandis que si la petite sphère existait seule, sa capacité serait 0,5. Le pouvoir condensant serait $\frac{3}{0,5} = 6$.

La densité δ de l'électricité sur la sphère intérieure est

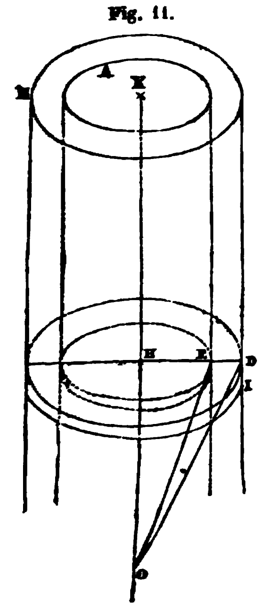
$$\delta = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{VR}{4\pi r(R-r)},$$

et sur la surface intérieure de la grande sphère

$$\delta' = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{Vr}{4\pi R(R-r)}.$$

56. — *Cylindres concentriques.* — Considérons (*fig.* 11) deux cylindres concentriques indéfinis, ou du moins assez longs pour pouvoir être regardés comme tels, ce qui est, par exemple, le cas des câbles sous-marins qui sont de véritables condensateurs dont l'armature intérieure est formée par le fil conducteur et l'armature extérieure par l'enveloppe métallique ou l'eau dans laquelle ils sont plongés.

Fig. 11.



Pour chacun des deux cylindres la distribution de l'électricité est évidemment uniforme et la densité est partout la même. Soit Q la charge électrique du cylindre intérieur correspondant à

une longueur l, la charge du cylindre extérieur dans la même étendue est — Q.

Traçons deux plans parallèles voisins situés à une très-petite distance $DI = a$ l'un de l'autre; ils découperont sur les deux cylindres deux petits anneaux, dont la charge électrique sera égale à $\frac{Qa}{l}$.

Le potentiel dû à ces deux anneaux en un point O de l'axe est

$$\frac{Qa}{l \times OE} - \frac{Qa}{l \times OD},$$

ou, en nommant R le rayon HD du cylindre extérieur, r celui du cylindre intérieur, HE, et x la distance OH,

$$\frac{Q}{l}\left(\frac{a}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{a}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right).$$

En menant une série de plans parallèles équidistants, et faisant la somme des potentiels dus aux anneaux ainsi obtenus pour toute l'étendue du cylindre, on trouve pou le potentiel en un point quelconque de l'axe *

$$V = \frac{2Q}{l} \log \text{nép} \frac{R}{r}$$

* En remplaçant a par dx, on a pour la différentielle du potentiel

$$dV = \frac{Q}{l}\left(\frac{dx}{\sqrt{r^2 + x^2}} - \frac{dx}{\sqrt{R^2 + x^2}}\right),$$

d'où

$$V = \frac{Q}{l}\left[\log \text{nép}\left(\frac{x + \sqrt{r^2 + x^2}}{r}\right) - \log \text{nép} \frac{x + \sqrt{R^2 + x^2}}{R}\right]$$

$$= \frac{Q}{l} \log \text{nép}\left(\frac{x + \sqrt{r^2 + x^2}}{x + \sqrt{R^2 + x^2}} \times \frac{R}{r}\right).$$

En prenant l'intégrale dans les limites de $x = -\infty$ à $x = +\infty$, on trouve

$$V = \frac{2Q}{l} \log \text{nép} \frac{R}{r}.$$

d'où

$$Q = \frac{Vl}{2 \log \text{nép} \frac{R}{r}};$$

on en déduit pour la capacité électro-statique S, qui correspond à la longueur l du cylindre,

$$S = \frac{Q}{V} = \frac{l}{2 \log \text{nép} \frac{R}{r}},$$

ou, si l'on passe des logarithmes naturels aux logarithmes ordinaires *,

$$S = \frac{l \log e}{2 \log \frac{R}{r}} = \frac{l \times 0{,}434}{2 \log \frac{R}{r}}.$$

La densité δ de l'électricité sur le cylindre intérieur est égale à $\frac{Q}{2\pi r l}$ ou

$$\delta = \frac{V}{4\pi r \log \text{nép} \frac{R}{r}},$$

et sur le cylindre extérieur

$$\delta' = \frac{V}{4\pi R \log \text{nép} \frac{R}{r}}.$$

57. — Soit d la distance des deux surfaces cylindriques, $d = R - r$. En remplaçant R par $d + r$ dans la valeur de Q, on a

$$Q = \frac{Vl}{2 \log \text{nép}\left(1 + \frac{d}{r}\right)}.$$

Si la distance d des deux cylindres est très-faible par

* On sait que $e = 2{,}718$ et $\log e = 0{,}43429$.

rapport au rayon r, on peut, en raison de la petitesse de $\frac{d}{r}$, remplacer $\log \text{nép}\left(1+\frac{d}{r}\right)$ par $\frac{d}{r}$, ce qui donne

$$Q=\frac{lrV}{2d}.$$

En nommant A la surface qui correspond à la hauteur l des cylindres, on a $A = 2\pi lr$, et

$$Q=\frac{AV}{4\pi d};$$

la capacité électro-statique S correspondant à la surface A est :

$$S=\frac{A}{4\pi d}.$$

Enfin la densité δ de l'électricité a pour valeur

$$\delta=\frac{Q}{A}=\frac{V}{4\pi d}.$$

Les cylindres ne peuvent être indéfinis, et la densité est plus grande aux extrémités qu'au milieu ; néanmoins ces formules sont suffisamment exactes dans baucoup de cas. Elles sont applicables notamment aux bouteilles de Leyde.

58. — Au lieu de deux cylindres concentriques indéfinis, supposons qu'on en ait un seul isolé, ce qui est le cas d'un fil télégraphique suspendu dans l'air. Pour avoir la capacité électro-statique d'une longueur l de ce fil, il faut faire R infiniment grand dans l'équation du n° 56.

$$S=\frac{l}{2\log \text{nép}\frac{R}{r}},$$

ce qui conduit à $S=0$.

On arrive à cette conclusion qu'il n'est pas possible de

communiquer une charge, si petite qu'elle soit, à un conducteur cylindrique placé dans ces conditions; mais il faut remarquer qu'on ne peut concevoir un fil complétement soustrait à l'influence des corps environnants. Un fil télégraphique isolé est situé à une certaine distance du sol, qui agit sur lui comme l'armature extérieure d'un condensateur.

On a donc à calculer la capacité d'un conducteur cylindrique indéfini situé à une certaine distance d'un plan également indéfini.

En appliquant la théorie du potentiel à la recherche de la capacité électro-statique d'un condensateur formé de deux cylindres excentriques indéfinis, on arrive à la formule *

$$S = \frac{l}{\log\text{nép}\, \dfrac{R^2 + r^2 - a^2 + \sqrt{(R+r+a)(R+r-a)(R-r+a)(R-r-a)}}{R^2 + r^2 - a^2 - \sqrt{(R+r+a)(R+r-a)(R-r+a)(R-r-a)}}},$$

dans laquelle R est le rayon du cylindre extérieur, r celui du cylindre intérieur, a l'excentricité et S la capacité du cylindre intérieur correspondant à une longueur l.

Si les cylindres sont concentriques, $a = 0$, et l'on retrouve la formule

$$S = \frac{l}{2 \log\text{nép}\, \dfrac{R}{r}}.$$

Pour passer au cas d'un cylindre et d'un plan, on remplace l'excentricité a par sa valeur en fonction de la plus courte distance d du centre du cylindre intérieur à la circonférence du cylindre extérieur, $a = R - d$, et l'on suppose R infiniment grand.

* Voir le *Journal de physique*, nos d'avril et de mai 1874.

On arrive ainsi à la formule

$$S = \frac{l}{\log \text{nép} \frac{d+\sqrt{d^2-r^2}}{d-\sqrt{d^2-r^2}}} = \frac{l}{\log \text{nép} \frac{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}}}}.$$

r étant très-petit par rapport à d, on peut remplacer l'expression logarithmique par $2 \log \text{nép} \frac{2d}{r}$ *, ce qui conduit à la valeur de S

$$S = \frac{l}{2 \log \text{nép} \frac{2d}{r}}.$$

La capacité d'un fil suspendu horizontalement dans l'air à une certaine distance du sol est donc la même que celle d'un fil de même longueur et de même diamètre qui serait entouré d'une enveloppe cylindrique concentrique dont le rayon serait double de la hauteur à laquelle se trouve le fil.

59. — *Condensateurs plans.* — Nous examinerons encore les condensateurs à surface plane.

* $\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}}$ a pour valeur approximative $1-\frac{r^2}{2d^2}$:

$$\log \text{nép} \frac{1+\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}}}{1-\sqrt{1-\frac{r^2}{d^2}}} \text{ devient } \log \text{nép} \frac{2-\frac{r^2}{2d^2}}{\frac{r^2}{2d^2}}$$

ou, en négligeant $\frac{r^2}{2d^2}$ devant 2,

$$\log \text{nép} \frac{4d^2}{r^2} = 2 \log \text{nép} \frac{2d}{r}.$$

Concevons deux conducteurs terminés par deux surfaces planes indéfinies en présence, l'un des corps étant électrisé ou en communication avec une source électrique et l'autre avec la terre ; la densité est uniforme et égale sur les deux surfaces voisines. On pourrait calculer directement sa valeur en fonction du potentiel de la plaque électrisée, mais il est plus simple de la déduire des formules précédentes, en considérant les deux surfaces planes comme appartenant à un condensateur cylindrique dont les rayons sont infiniment grands, ou dont la distance des armatures est très-petite par rapport aux rayons (n° 57).

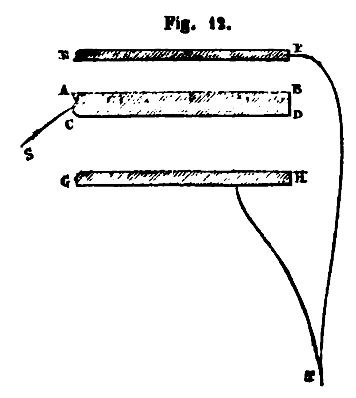
La densité δ de l'électricité est, en nommant d la distance des deux surfaces planes et V le potentiel de celle qui est électrisée, ou la différence des potentiels des deux surfaces,

$$\delta = \frac{V}{4\pi d}.$$

Dans la pratique les surfaces sont forcément limitées, et la densité augmente sur les bords, mais l'approximation est suffisante lorsque la distance d est petite par rapport à l'étendue des surfaces. En outre, les surfaces appartiennent à des plaques ou lames plus ou moins épaisses, et la charge électrique se répartit sur les deux faces de la plaque électrisée.

Soit ABCD la plaque électrisée placée entre les deux plaques EF et GH (*fig.* 12) qui communiquent avec la terre en T ; la densité δ de l'électricité répandue sur la surface AB est $\delta = \frac{V}{4\pi d}$; celle de l'électricité répandue sur la face CD est $\delta' = \frac{V}{4\pi d'}$, d et d' étant les distances qui séparent les surfaces AB et CD des surfaces voisines

Fig. 12.



EF et GH. La charge totale, Q, qui correspond à une étendue A de la plaque, est

$$Q = A(\delta + \delta') = \frac{VA}{4\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right),$$

et la capacité électro-statique S,

$$S = \frac{A}{4\pi}\left(\frac{1}{d} + \frac{1}{d'}\right),$$

Si la plaque est d'un côté en présence de l'espace, ainsi qu'il arrive pour les carreaux fulminants qu'on emploie dans les cabinets de physique, $\frac{1}{d'}$ est négligeable, et l'on a

$$Q = \frac{A}{4\pi d}.$$

Lorsque la plaque électrisée est située entre deux autres plaques également distantes communiquant avec la terre, $d = d'$, et la capacité pour une étendue A est

$$S = \frac{A}{2\pi d}.$$

60. — *Condensateurs ordinaires.* — On donne ordi-

nairement aux condensateurs la forme d'une bouteille garnie à l'extérieur et à l'intérieur de feuilles d'étain (bouteilles de Leyde); l'armature extérieure est en communication avec la terre, et l'armature intérieure, terminée par une tige et un bouton, est mise en communication avec la source électrique. La quantité d'électricité répandue sur les deux armatures n'est pas égale, puisque l'armature extérieure n'est pas entièrement enveloppée par l'armature intérieure; l'enveloppe est complétée par l'espace environnant, et une petite quantité d'électricité paraît libre pour l'observateur qui se trouve placé entre le bouton et les corps avoisinants.

A la capacité due aux deux armatures cylindriques $\frac{A}{4\pi d}$ (n° 57) il faut ajouter celle du bouton extérieur, mais sa valeur est ordinairement négligeable.

En réunissant plusieurs bouteilles de Leyde et les faisant communiquer entre elles par leurs armatures intérieures on forme une batterie électrique, dont la capacité est égale à la somme des capacités de toutes les bouteilles.

Pour avoir sur une petite étendue un condensateur d'une grande capacité électro-statique, on superpose des feuilles d'étain qu'on sépare les unes des autres par du parchemin ou du papier enduit de paraffine. Les lames de rang pair sont reliées entre elles ainsi que les lames de rang impair; les unes sont en communication avec la terre et les autres avec la source. On a ainsi un condensateur dont la capacité est sensiblement égale à $\frac{A}{2\pi d}$, A étant l'étendue totale des feuilles métalliques en communication avec la source électrique, et d l'épaisseur du papier ou du parchemin.

61. — *Capacité inductrice spécifique.* — Faraday a reconnu que la capacité électro-statique d'un condensateur ne dépend pas seulement de la distance des armatures, mais qu'elle varie aussi avec la nature du corps isolant, ou du *di-électrique*, qui les sépare.

Cette influence du corps isolant, qui paraît au premier abord en contradiction avec la loi de l'attraction des deux fluides à distance, s'explique facilement par une polarisation des molécules du di-électrique, en admettant qu'elles sont un peu conductrices et que les fluides électriques, bien qu'ils ne passent pas d'une molécule à la suivante, peuvent cependant se séparer dans chacune d'elles. L'effet est le même que si l'on interposait entre les deux armatures d'un condensateur une ou plusieurs plaques métalliques isolées; la capacité du condensateur augmenterait par suite de cette interposition.

L'air atmosphérique et en général tous les gaz, simples et composés, ne paraissent pas doués de cette propriété de modifier le pouvoir condensant, car la capacité d'un condensateur dont le di-électrique est un gaz reste constante quelles que soient la nature de ce gaz, sa température et sa pression, et est probablement la même que si l'on faisait le vide absolu entre les deux armatures. Lorsque le gaz est remplacé par un autre corps isolant tel que le verre, la résine, la gutta-percha, etc., la capacité du condensateur augmente.

On nomme *pouvoir spécifique inducteur* d'une matière isolante le rapport de la capacité électro-statique d'un condensateur dont les armatures seraient séparées par cette substance, à celle qu'il aurait si l'on remplaçait cette dernière par de l'air. En d'autres termes, on prend pour unité de pouvoir inducteur celui de l'air, et on rapporte à cette unité celui des autres corps.

Le tableau suivant donne le *pouvoir spécifique inducteur* de quelques substances * :

Air atmosphérique	1,00
Spermacéti	1,15
Verre	1,80
Gomme-laque	2,00
Soufre	2,21
Caoutchouc	2,80
Gutta-percha perfectionnée	3,00
Gutta-percha ordinaire	3,80

Lorsqu'on calcule directement la capacité électro-statique d'un condensateur d'après sa forme géométrique, on suppose le pouvoir spécifique inducteur du di-électrique égal à l'unité. Pour avoir la capacité réelle, il faut multiplier le résultat par le nombre qui représente le pouvoir inducteur de la substance qui sépare les deux armatures.

L'influence des di-électriques a conduit Faraday à une théorie de l'électricité qui, si elle ne donne pas la véritable clef des phénomènes électriques, paraît se rapprocher plus de la vérité que l'hypothèse des deux fluides. Toutefois, cette théorie ne paraît pas encore établie sur des bases assez certaines pour être adoptée à l'exclusion de toute autre.

62. — Les phénomènes de condensation sont accompagnés d'effets secondaires qui tiennent à diverses causes.

En premier lieu, la charge complète d'un condensateur n'est instantanée que dans le cas ou le di-électrique est un gaz; elle augmente ordinairement avec le temps, soit par suite d'une pénétration de l'électricité dans le corps isolant soit parce que la polarisation des molécules de ce

* Le pouvoir inducteur varie avec l'état de pureté des matières, la température, etc.; les nombres de ce tableau ne sont donc qu'approximatifs.

dernier, ou la séparation des fluides dans chacune d'elles, ne s'effectue que peu à peu.

Pour la même raison, après une première décharge d'un condensateur, on constate toujours une petite charge résiduelle due au fluide retenu par le di-électrique, qui devient libre et peut donner lieu à plusieurs décharges successives qui vont en s'affaiblissant.

Il paraît résulter des expériences de M. Gaugain que lorsqu'un condensateur est mis en communication avec une source électrique pendant un instant infiniment court, il prend la même charge quel que soit le di-électrique interposé entre les armatures, air, gaz, caoutchouc, gutta-percha, etc. ; mais la charge s'accroît plus ou moins rapidement suivant la nature du corps isolant. La capacité électro-statique varie donc suivant la durée du contact avec la source électrique. Afin d'avoir des nombres comparables, on mesure les capacités en adoptant pour la charge une durée constante; on admet une minute dans les recherches sur les câbles sous-marins.

Un autre effet tient à ce que les substances qu'on emploie comme di-électriques ne sont pas complétement isolantes. Il se produit entre les deux armatures une propagation lente de l'électricité qui s'écoule peu à peu et disparaît au bout d'un temps plus ou moins long, variable suivant la conductibilité du di-élecrique.

63. — *Équation de l'équilibre électrique.* — Quand on réunit les armatures intérieures de plusieurs condensateurs, ils n'en forment plus qu'un seul dont la capacité électro-statique est égale à la somme des capacités de chacun d'eux.

Si ces condensateurs sont préalablement électrisés, en totalité ou en partie, il se produit une nouvelle distribution des fluides telle que le potentiel des armatures qui

sont mises en communication soit partout le même et que la quantité totale d'électricité ou plutôt la somme algébrique des quantités répandues sur les divers condensateurs ne change pas.

Ainsi, supposons trois condensateurs dont les capacités électro-statiques soient S, S' et S'', chargés de quantités d'électricité Q, Q' et Q'', et soient V, V' et V'' les potentiels des trois condensateurs ; on a $Q = VS$, $Q' = V'S'$ et $Q'' = V''S''$.

Si l'on met les armatures intérieures en communication, on formera un seul condensateur de capacité $S_1 = S + S' + S''$, etc., dont la charge est $Q_1 = Q + Q' + Q''$ et le potentiel

$$V_1 = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q + Q' + Q''}{S + S' + S''} = \frac{VS + V'S' + V''S''}{S + S' + S''}.$$

La charge de chacun des condensateurs partiels se trouve modifiée : pour le premier, elle devient V_1S, pour le second, V_1S', et pour le troisième, V_1S''.

Lorsque le nombre des condensateurs est réduit à deux,

$$V_1 = \frac{Q + Q'}{S + S'} = \frac{VS + V'S'}{S + S'}.$$

Si les deux charges Q et Q' sont égales et de signe contraire $V_1 = 0$; les condensateurs sont ramenés à l'état naturel.

Quand un des condensateurs est seul électrisé, on a

$$Q' = 0 \quad \text{et} \quad V_1 = \frac{Q}{S + S'} = \frac{VS}{S + S'}.$$

Enfin, si la capacité S du condensateur électrisé était très-grande par rapport à celle de l'autre condensateur, on pourrait négliger S' devant S et l'on aurait sensiblement $V_1 = V$.

Les mêmes formules s'appliquent à des conducteurs

ordinaires électrisés, pourvu qu'ils soient assez éloignés les uns des autres pour ne pouvoir s'influencer réciproquement.

64. — *Applications.* — La connaissance de la capacité électro-statique d'un conducteur a une grande importance, notamment en télégraphie, car la vitesse de transmission, c'est-à-dire le nombre des signaux qu'on peut transmettre avec des appareils déterminés sur une ligne de longueur donnée, dont le fil conducteur est parfaitement isolé, comme le sont les conducteurs sous-marins, est proportionnelle au produit de la section du fil par sa conductibilité et en raison inverse de sa capacité électro-statique. Sur les lignes aériennes la vitesse de transmission dépend aussi de la capacité électro-statique, mais elle est modifiée par d'autres influences telles que les dérivations plus ou moins considérables auxquelles est soumis le fil conducteur, l'action inductive des fils voisins, etc.

Les formules du n° 56 donnent en unités électro-statiques absolues la capacité électro-statique S d'un conducteur sous-marin

$$S = \frac{l \times 0,434}{2 \times \log \frac{R}{r}} \times c,$$

l étant la longueur du conducteur, r son rayon, R le rayon de l'âme, ou du fil recouvert de son enveloppe isolante, et c le pouvoir spécifique inducteur de la substance qui forme cette enveloppe.

Prenons comme exemple le câble transatlantique français pour lequel on a $r = 0^m,00213$, $R = 0^m,00596$, et admettons 3 pour la valeur de c.

On a pour la capacité qui correspond à 1 kilomètre de

longueur

$$S = \frac{1000 \times 0,217}{\log 2,80} \times 3$$

ou

$$S = \frac{217 \times 3}{0,447} = 1523,$$

C'est la capacité d'une sphère qui serait soustraite à toute influence étrangère et dont le rayon serait égal à 1.523 mètres.

Une batterie électrique dont les armatures seraient séparées par une lame de verre de 2 millimètres d'épaisseur devrait, pour offrir la même capacité, avoir une étendue A donnée par l'équation

$$\frac{A}{4\pi \times 0,002} \times 1,80 = 1523$$

ou

$$A = 21 \text{ mètres carrés.}$$

Pour obtenir la même capacité avec un condensateur formé de lames d'étain séparées par des feuilles de papier enduit de paraffine, il faudrait, en admettant 2 pour le pouvoir inducteur du di-électrique et 1/3 de millimètre pour son épaisseur, une étendue totale de feuilles A' telle que

$$\frac{A'}{4\pi \times 0,0003} \times 2 = 1523$$

ou

$$A' = 2,77 \text{ mètres carrés.}$$

La capacité totale du câble, dont la longueur est d'environ 4.000 kilomètres, est 6.092.000 et représente celle d'une batterie électrique dont la surface totale aurait 84.000 mètres carrés, ou d'un condensateur à feuilles d'étain dont l'étendue serait de 11.080 mètres carrés ; on peut encore dire que ce serait celle d'une sphère isolée qui aurait pour rayon 6.092.200, c'est-à-dire dont la dimension serait à peu près celle de la terre.

65. La capacité électro-statique d'un fil aérien isolé, suspendu dans l'air, est donnée par l'équation

$$S = \frac{l}{2 \log \text{nép} \frac{2d}{r}} = \frac{l \times 0,434}{2 \log \frac{2d}{r}}.$$

l étant la longueur du fil, r son rayon et d sa distance du sol (n° 58).

Si l'on suppose un fil télégraphique de $0^m,004$ de diamètre situé à une hauteur moyenne de 4 mètres, on a pour la capacité qui correspond à 1 kilomètre de longueur

$$S = \frac{1000 \times 0,434}{2 \log \frac{2 \times 4}{0,002}} = \frac{217}{\log 4000} = 60.$$

Elle est environ vingt-cinq fois moindre que celle du câble sous-marin transatlantique français, pour une même longueur.

Enfin, pour un petit fil isolé tel que celui qu'on emploie dans les expériences de physique, qui aurait un demi-millimètre de diamètre et serait situé à une distance moyenne de 2 mètres des corps environnants, on trouve pour la capacité correspondant à 1 mètre de longueur 0,055.

Cette capacité est en général négligeable lorsqu'on opère avec des fils dont la longueur ne dépasse pas quelques mètres.

CHAPITRE IV.

MESURE DES GRANDEURS ÉLECTROSTATIQUES.

66. La capacité électrostatique S d'un conducteur ou d'un condensateur, sa charge électrique Q et son potentiel V, ou plutôt la différence des potentiels des deux armatures, sont liés par la relation

$$Q = VS.$$

Pour avoir les valeurs de ces trois grandeurs, il faut mesurer directement au moins deux d'entre elles.

La capacité électrostatique d'un condensateur peut, dans quelques cas particuliers, se déduire de sa forme géométrique et de ses dimensions ; mais, en général, c'est par l'expérience qu'elle se détermine ainsi que le potentiel et la charge.

Les instruments qui servent à ces mesures sont les *électromètres* et les *condensateurs-étalons* *.

Électromètres.

67. Les électromètres sont des appareils qui, mis en communication avec un corps électrisé ou avec une source

* Ces appareils correspondent aux galvanomètres et aux bobines de résistance qu'on emploie dans l'étude des courants. Nous reviendrons sur l'analogie qui existe entre les phénomènes de condensation et les phénomènes de propagation.

électrique, se mettent au même potentiel en prenant une charge qu'on mesure par l'attraction ou la répulsion qu'elle exerce sur un autre conducteur également électrisé et qui fait aussi partie de l'instrument ; de la grandeur de cette charge on déduit la valeur du potentiel.

Tantôt le second conducteur est électrisé par la même source électrique que le premier, tantôt on a recours à une source étrangère, ce qui fournit deux classes distinctes d'électromètres ; les uns sont dits *idiostatiques* et les autres *hétérostatiques*.

Tout électromètre doit donc comprendre au moins un conducteur mobile et la charge est donnée soit automatiquement par la lecture d'un angle ou d'une longueur, soit par la grandeur de la force qu'il faut appliquer pour vaincre l'attraction ou la répulsion électrique et ramener à une même position d'équilibre la partie mobile de l'appareil. Cette dernière disposition, qui exige une opération manuelle, est d'un emploi moins commode, mais elle fournit des résultats plus aisément comparables puisque la capacité électrostatique de l'instrument reste constante.

Certains électromètres donnent directement la valeur absolue du potentiel par la mesure d'une longueur ou d'une force ; on les nomme *électromètres absolus**. Les autres peuvent être gradués ou disposés de façon que leurs indications soient proportionnelles aux potentiels, mais pour en avoir la véritable valeur il est nécessaire de multiplier ces indications par une constante propre à chaque appareil et qui doit être déterminée par l'expérience.

* On nomme, en général, instruments absolus ceux qui donnent directement, en fonction de l'unité, la véritable valeur des grandeurs qu'ils servent à mesurer.

La balance de Coulomb, lorsqu'on connaît le moment de torsion du fil, et la balance ordinaire disposée comme il a été dit au n° 35, sont des électromètres absolus. On peut en effet mesurer à l'aide de ces instruments la force f avec laquelle se repoussent deux petites sphères égales électrisées par la même source électrique et en déduire leur charge q et leur potentiel V. Si, en effet, ces sphères sont assez petites par rapport à leur distance l pour qu'il ne se produise pas d'induction électrostatique, $f = \frac{q^2}{l^2}$ et $q = l\sqrt{f}$; r étant le rayon des deux sphères, leur potentiel V, égal à celui de la source, est $V = \frac{q}{r} = \frac{l\sqrt{f}}{r}$.

On peut aussi appliquer la méthode hétérostatique en électrisant préalablement l'une des deux sphères avec une source dont le potentiel est connu.

68. Ces instruments, qui exigent une charge relativement considérable des sphères, ne peuvent convenir pour la mesure de faibles potentiels, et l'on a été conduit à construire des électromètres plus sensibles ; les principaux sont :

L'électromètre ou électroscope à pailles ou à lames d'or, dans lequel les charges et par suite les potentiels se mesurent par l'écartement plus ou moins grand de deux pailles ou de deux lames ;

L'électromètre de Peltier formé de deux tiges horizontales, dont l'une est fixe et l'autre mobile. Cette dernière, en aluminium, est ramenée au contact de la première par une petite aiguille aimantée et dévie lorsqu'une charge électrique est communiquée à l'appareil. Pour de très-petites déviations le potentiel est proportionnel à l'angle formé par les deux aiguilles ;

L'électromètre de Bonhenberger, qui consiste en une

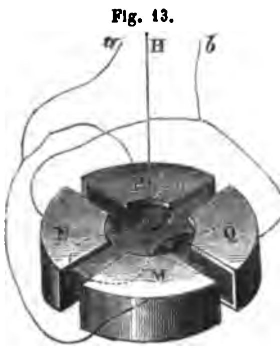
petite lame d'or mobile entre les deux pôles contraires d'un pile sèche et qui se rapproche de l'un ou l'autre lorsqu'elle est électrisée;

Les électromètres à disques, imaginés par Harris, qui reposent sur l'attraction de deux disques parallèles maintenus à des potentiels différents. Les deux disques étant placés à une distance très-petite l'un de l'autre, les fluides contraires se distribuent à leur surface d'une façon à peu près uniforme; la différence des potentiels des deux disques est proportionnelle à la distance à laquelle ils doivent être amenés pour produire une force attractive constante.

La mesure des potentiels a été perfectionnée dans ces derniers temps par sir William Thomson qui a imaginé plusieurs électromètres remarquables par leur sensibilité et leur précision, et notamment l'électromètre à quadrant et l'électromètre absolu que nous allons décrire.

69. *Électromètre à quadrant de M. Thomson.* — Cet électromètre, qui est destiné à mesurer de très-faibles différences de potentiel, repose sur la méthode hétérostatique; il se compose d'une boîte plate et circulaire en cuivre, divisée en quatre secteurs parfaitement égaux suivant deux diamètres perpendiculaires. Ces quatre secteurs ou quadrants M, N, P, Q (*fig.* 13), sont rapprochés de façon à ne laisser entre eux qu'un très-petit intervalle; ils sont reliés deux à deux, et en croix, M avec P, N avec Q; les fils de communication aboutissent à deux fils *a* et *b*.

Fig. 13.



La partie mobile est une feuille d'aluminium *e*, dé-

coupée en forme de 8, qui est suspendue au centre de la boîte par un fil de platine H. Dans la position d'équilibre la ligne médiane de l'aiguille est parallèle à l'un des diamètres de séparation des secteurs, ce qu'on réalise aisément en tournant convenablement l'axe de suspension du fil.

L'aiguille est mise en communication par l'intermédiaire du fil de suspension avec une source électrique spéciale qui lui communique un potentiel constant.

Les quatre secteurs étant parfaitement symétriques exercent sur l'aiguille des actions dont la résultante est nulle s'ils ont tous les quatre une charge égale, c'est-à-dire s'ils ont le même potentiel ou un potentiel nul; mais si leur charge est inégale, l'aiguille dévie de sa position d'équilibre.

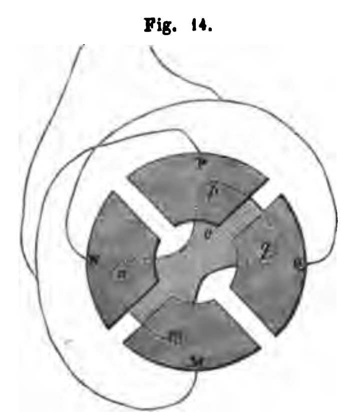
Pour mesurer la différence des potentiels de deux sources, qui sont par exemple les deux pôles d'une pile ou un corps électrisé à la terre, on met l'une d'elles en communication avec les deux secteurs P et M par le fil *a*, et l'autre avec les deux secteurs N et Q par le fil *b*. L'aiguille est soumise à un couple et tourne jusqu'à ce que la torsion du fil fasse équilibre à l'action des secteurs.

Le fil de suspension est assez rigide pour que la déviation soit extrêmement faible, de sorte que la position des divers points de l'aiguille d'aluminium reste à peu près la même par rapport aux secteurs, dont la capacité électrostatique n'est pas sensiblement modifiée.

Soit C le potentiel de l'aiguille, A celui des secteurs M et P, et B celui des deux autres N et Q (*fig.* 14). La partie *m* de l'aiguille qui est entourée par le quadrant M forme l'armature intérieure d'un condensateur dont le quadrant lui-même est l'armature extérieure; sa charge est proportionnelle à la différence A — C des potentiels

(n° 52), et sur le quadrant lui-même il se développe une quantité d'électricité égale et de signe contraire. La composante horizontale de la force avec laquelle *m* est attiré vers M peut donc être représentée par $K(A - C)^2$, K étant un coefficient constant.

Fig. 14.



La même branche de l'aiguille est soumise dans la direction opposée à une force égale à $K(B - C)^2$, due à l'action du quadrant N sur la partie *n* de l'aiguille, la constante K étant la même en raison du faible déplacement de l'aiguille et de l'égalité de forme des secteurs. La différence entre ces deux forces, $K(A-B)(2C-A-B)$, représente la force qui agit sur la branche *mn*. L'autre branche donne lieu à une action égale.

Le couple de rotation produit par la différence des potentiels des secteurs est donc proportionnel à $(A-B)\left[C-\frac{1}{2}(A+B)\right]$. Ce couple, auquel fait équilibre le moment de torsion du fil, est pour de faibles déviations proportionnel à l'angle que forme l'aiguille d'aluminium avec sa direction normale.

Si les potentiels A et B sont égaux et de signes contraires, ainsi qu'il arrive quand les secteurs sont en communication avec les deux pôles d'une pile isolée, ou si le potentiel C est suffisamment grand par rapport aux potentiels A et B, le terme $\frac{1}{2}(A+B)$ est nul ou négligeable, la déviation de l'aiguille est alors proportionnelle

à (A — B)C. Pour une valeur constante de C, la différence des potentiels A et B est alors proportionnelle à l'angle de déviation. En augmentant C on peut à volonté accroître la sensibilité de l'appareil.

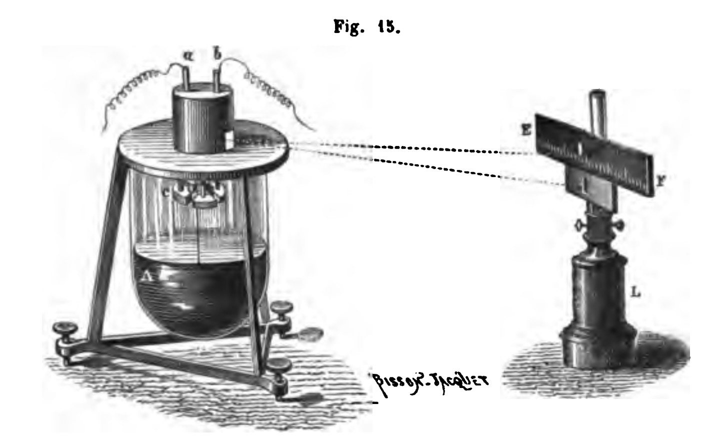
La source électrique qui communique un potentiel constant à l'aiguille est un condensateur dont l'armature intérieure est reliée au fil de suspension de l'aiguille. Pour les expériences de précision qui doivent avoir une certaine durée l'appareil doit être complété par un électromètre auxiliaire de la classe des électromètres idiostatiques qui permette de s'assurer de la constance du potentiel du condensateur et d'une petite machine électrique, ou *rechargeur*, au moyen de laquelle on recharge le condensateur à mesure que son potentiel diminue.

L'électromètre auxiliaire adopté par M. Thomson, qui porte le nom de *jauge électrique*, est formé de deux disques dont la distance doit rester constante; il peut même être disposé de façon que le mouvement des disques produit par la variation de leurs potentiels détermine la fermeture du circuit d'une pile et mette automatiquement en mouvement le rechargeur.

On peut du reste admettre que dans un endroit bien sec un condensateur ne perd pas plus de 1/4 à 1/2 par 100 de sa charge par jour.

La *fig.* 15 donne une idée de la forme générale de l'électromètre de M. Thomson. Les quadrants et l'aiguille *c* sont renfermés dans une cloche de verre renversée A. Cette cloche, revêtue extérieurement d'une feuille d'étain, sert de condensateur; elle est remplie à moitié d'acide sulfurique destiné à dessécher l'air et qui forme l'armature intérieure. Deux tiges parfaitement isolées communiquent avec les deux paires de quadrants; elles sont terminées par deux bornes *a* et *b*, ou élec-

Fig. 15.



trodes, auxquelles s'attachent les fils d'essai en relation avec les sources. Le fil de suspension plonge par sa partie inférieure dans l'acide sulfurique.

Les déviations de l'aiguille étant très-faibles, on les amplifie au moyen d'un petit miroir collé sur le fil métallique qui réfléchit sur une échelle divisée EF placée à une certaine distance, l'image d'un point lumineux fourni par une lampe L.

Cet appareil est d'une telle sensibilité qu'il permet d'apprécier les plus légères différences du potentiel, telles que celles qui peuvent exister aux deux pôles d'un couple voltaïque, aux divers points d'un circuit parcouru par un courant*. On comprend combien il est précieux pour les recherches théoriques et pratiques.

Quelquefois on simplifie l'appareil en supprimant la partie supérieure de la boîte à quadrants : il se compose implement alors d'une aiguille mobile au-dessus de

* M. Thomson admet qu'on peut observer avec cet instrument des différences de potentiel correspondant à 1/400 de celle qui est produite par un élément Daniell.

quatre secteurs plans, et est naturellement moins sensible.

70. *Électromètre absolu.* — L'électromètre absolu de M. Thomson n'est autre que l'électromètre à disque de Harris modifié par l'addition d'un anneau de garde.

Si deux plaques parallèles, situées à une très-petite distance l'une de l'autre, ont des potentiels différents, les deux surfaces voisines se chargent de quantités d'électricité égales et de signes contraires et sont attirées l'une par l'autre. La densité électrique sur chacune des surfaces est

$$\delta = \frac{V - V'}{4\pi d},$$

V et V' étant les potentiels des deux plaques et d la distance des deux surfaces (n° 59), ou

$$\delta = \frac{V}{4\pi d},$$

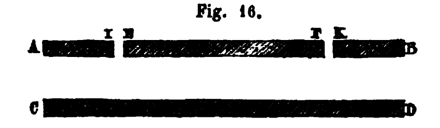
si l'une des plaques communique avec la terre.

La densité n'est pas la même dans toute l'étendue des surfaces ; elle augmente sur les bords ou elle varie avec la distance d suivant une loi très-complexe.

M. Thomson a eu l'idée de n'envisager que l'action de l'une des plaques sur la partie centrale de l'autre, pour laquelle on peut considérer la densité comme uniforme.

Dans l'une des plaques, dont AB (*fig.* 16) représente

Fig. 16.

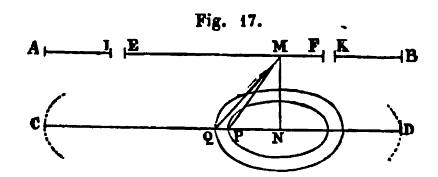


un diamètre, est découpé à cet effet un petit disque circulaire EF qui est seul mobile, tout en restant par son

point de suspension en communication avec la partie annulaire de la plaque qui l'entoure. Cet anneau AIKB constitue ce qu'on nomme l'anneau de garde; son effet est de prolonger le disque attiré de façon à maintenir la densité électrique uniforme à sa surface.

On a donc à calculer l'attraction exercée sur une petite surface plane uniformément électrisée projetée en EF (*fig.* 17) par une grande surface CD, située à une dis-

Fig. 17.



tance connue $MN = d$, dont la densité électrique est également uniforme dans toute la partie assez voisine pour avoir de l'influence, et qu'on peut considérer comme indéfinie.

L'action est la même en tous les points du disque EF : soit M un élément dont la charge est q. Abaissons le perpendiculaire MN sur le plan CD et traçons du point N comme centre deux circonférences très-voisines de rayons $NP = x$ et $NQ = x + \alpha$, α étant très-petit.

La quantité d'électricité répandue sur l'espace annulaire compris entre ces deux circonférences est $\delta\pi\,[(x+\alpha)^2 - x^2]$, ou, en négligeant $\delta\pi\alpha^2$, $2\delta\pi x\alpha$. La force attractive exercée par cet anneau sur le point M, dans la direction MN, est

$$\frac{q \times 2\delta\pi x\alpha}{\mathrm{MP}^2} \times \frac{\mathrm{MN}}{\mathrm{MP}} \quad \text{ou} \quad \frac{2q\delta\pi d \times x\alpha}{(x^2 + d^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

En calculant les forces dues à une série d'anneaux analogues pour toute l'étendue du plan CD et faisant

la somme*, on trouve pour l'attraction totale sur le point M :

$$2q\delta\pi.$$

On remarquera que cette force attractive est indépendante de la distance du point M au plan CD.

Tous les points du disque sont soumis à la même force; si Q est la masse d'électricité répandue sur tout le disque, la force totale f sera

$$f = 2Q\delta\pi.$$

Q a pour valeur le produit de la surface du disque EF par la densité de l'électricité qui est aussi égale à δ; la force attractive f qui agit sur le disque mobile a donc pour expression, en désignant par A la surface de ce dernier, $f = 2A\pi\delta^2$, et comme $\delta = \frac{V}{4\pi d}$,

$$f = \frac{AV^2}{8\pi d^2}.$$

On en tire

$$V = d\sqrt{\frac{8\pi f}{A}}.$$

Ainsi on a la valeur absolue du potentiel V quand on connaît la distance d des deux plans, la surface A du disque et la force qu'il faut appliquer au disque mobile pour le maintenir dans le plan de l'anneau de garde.

* En remplaçant α par dx, l'expression de la force devient

$$\frac{2\,q\delta\pi d \times x dx}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}} = q\delta\pi \times \frac{d\frac{x^2}{d^2}}{\left(\frac{x^2}{d^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}}$$

dont l'intégrale générale est $-\frac{2q\delta\pi}{\sqrt{\frac{x^2}{d^2}+1}}$; sa valeur de 0 à ∞ est : $2q\delta\pi$.

Si le disque est un cercle de rayon R, $A = \pi R^2$. On peut tenir compte de l'espace annulaire qui sépare le disque de l'anneau de garde en les supposant prolongés l'un et l'autre jusqu'au milieu de cet espace, ce qui revient à prendre pour la surface A la moyenne entre la surface du disque et celle du cercle intérieur de l'anneau de garde en nommant R′ le rayon de ce dernier

$$A = \frac{\pi (R^2 + R'^2)}{2} \quad \text{et} \quad V = 4d \sqrt{\frac{f}{R^2 + R'^2}}.$$

M. Thomson s'est assuré par l'expérience que ces formules peuvent être appliquées et donnent une très-grande approximation quand le diamètre du disque mobile ne dépasse pas les trois quarts et la distance des deux plans le quart ou le cinquième du diamètre total de la plaque *.

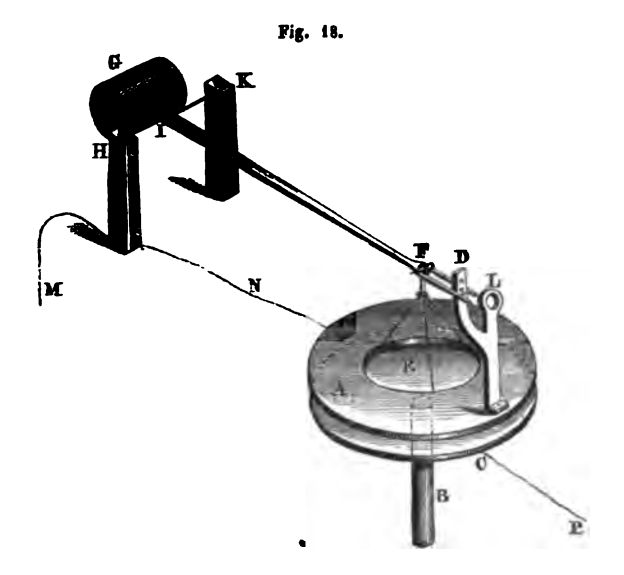
On néglige l'attraction produite par les fluides répandus sur les surfaces extérieures des disques AB et CB (*fig.* 16); outre que leur densité est très-faible, on peut augmenter leur distance au moyen d'enveloppes ou de cages métalliques fixées aux plaques et sur la surface extérieure desquelles se porte le fluide libre.

71. On voit dans la *fig.* 18 les principales dispositions de l'instrument.

E est le disque mobile suspendu par trois fils métalliques au levier GJF mobile en I autour d'un axe horizontal supporté par les montants H et K. Un contrepoids G fait équilibre au disque avec lequel il forme une petite balance. A est l'anneau de garde ; le disque circulaire C qui produit l'attraction est fixé sur une tige isolée B mobile dans le sens vertical et qu'on fait

* Voir le *Traité d'électricité et de magnétisme* de M. Maxwell et les pièces annexées aux rapports de la commission anglaise de l'étalon de résistance, etc.

Fig. 18.



mouvoir à l'aide d'une vis micrométrique qui permet d'apprécier les plus petits déplacements.

L'anneau de garde et le disque mobile sont en communication par le fil conducteur N, le montant H, le levier IF et les fils de suspension.

La balance est à sa position d'équilibre lorsque le disque mobile E se trouve exactement dans le plan de l'anneau de garde, ce qu'on reconnaît en comparant l'image d'un objet extérieur vu par réflexion sur le disque avec celle du même objet vu sur la surface de l'anneau. Un petit cheveu tendu entre les deux bras d'une petite fourchette fixée à l'extrémité du levier IF sert d'indicateur ; il oscille en face d'une petite plaque blanche D sur laquelle sont marqués deux points noirs très-voisins et se trouve au repère lorqu'en le regardant à travers une lentille L, on le voit passer exactement entre les deux points noirs.

Pour opérer on place d'abord un petit poids connu P sur le disque mobile et l'on règle le contre-poids de façon que, privée de toute trace d'électricité, la balance soit en équilibre.

On enlève alors le poids et l'on met en communication par le fil M le disque mobile et l'anneau de garde avec la terre, et par le fil P la plaque inférieure avec la source dont on veut mesurer le potentiel. On fait tourner la vis micrométrique de façon à élever ou à abaisser la tige B et la plaque C jusqu'à ce que le cheveu revienne au repère. Le disque E a repris sa position dans le plan de l'anneau de garde et la force attractive est égale à l'action de la pesanteur sur le poids P. Le poids exprimé en grammes représente une force absolue égale à Pg (g étant l'intensité de la pesanteur) ; on a donc, d'après la formule précédente,

$$V = 4d \sqrt{\frac{gP}{R^2 + R'^2}}.$$

Pour avoir la distance d, il suffit de faire mouvoir la vis micrométrique jusqu'à ce que le plateau C vienne au contact de l'anneau de garde. Le pas de vis étant connu, le nombre de tours qu'il faut faire exécuter à la vis micrométrique donne cette distance.

La détermination du point de la vis qui correspond à $d = 0$ présente toujours quelques incertitudes, et de plus le moindre défaut de parallélisme des plaques suffit pour entraîner des erreurs dans la mesure des faibles potentiels.

On y remédie en mesurant des différences de potentiels au moyen d'une électrisation auxiliaire.

On met d'abord la plaque C en communication avec l'armature intérieure d'une petite bouteille de Leyde électrisée, dont l'armature extérieure est en communi-

cation avec la terre ainsi que le disque mobile E. Si d est la distance à laquelle les disques doivent être amenés pour maintenir l'équilibre de la balance, le potentiel V de la bouteille de Leyde est

$$V = 4d \sqrt{\frac{gP}{R^2 + R'^2}}.$$

Pour mesurer le potentiel X d'une faible source électrique, tel que celui d'un couple voltaïque, on intercale ce couple entre l'armature intérieure de la bouteille de Leyde et la plaque C, dont le potentiel devient $V_1 = V + X$, d_1 étant la nouvelle distance à laquelle doivent être amenés les disques

$$V_1 = 4d_1 \sqrt{\frac{gP}{R^2 + R'^2}};$$

on en déduit

$$X = V_1 - V = 4(d_1 - d) \sqrt{\frac{gP}{R^2 + R'^2}}.$$

Le potentiel de la source s'obtient donc en mesurant la différence $d_1 - d$.

72. M. Thomson a donné diverses formes à ses électromètres absolus ; dans les modèles récents, le disque mobile, en aluminium, a environ 45 millimètres de diamètre ; il est séparé par un espace de 0^{mm},75 de l'anneau de garde, dont le diamètre est cinq ou six fois plus grand. Le pas de la vis micrométrique est de 0^{mm},5 et chaque tour est divisé en 100 parties. Chacune des divisions peut donner la mesure du potentiel d'un élément Daniell ; la vis ayant 60 tours, l'instrument permet de mesurer des potentiels variables de 1 à 600 éléments Daniell.

L'électromètre, dit à longue portée, a de plus grandes dimensions, bien que l'étendue du disque mobile soit

moindre. Le pas de vis est le même, mais le nombre de tours est de 200 ; chacune des divisions, ou centième de tour, correspond à 4 ou 5 éléments Daniell, ce qui permet d'évaluer des potentiels de 80 à 100.000 éléments Daniell, c'est-à-dire de même ordre que celui que peuvent développer les fortes machines électriques.

Enfin, M. Thomson a construit des électromètres plus portatifs, dans lesquels le disque suspendu est remplacé par un petit carré d'aluminium fixé à l'extrémité d'un levier également en aluminium; l'ensemble est supporté par un petit fil de platine qui passe par le centre de gravité et est tendu au moyen de deux ressorts. Le levier est terminé, comme dans la *fig.* 19, par une fourchette traversée par un cheveu qui permet de reconnaître le moment où le carré d'aluminium est au repère, c'est-à-dire dans le plan de la plaque de garde qui l'entoure. Le disque attirant est disposé au-dessus, à l'extrémité d'une vis micrométrique. On opère d'ailleurs comme il a été expliqué précédemment, le petit poids étant remplacé par le moment de torsion du fil de platine qui supporte le levier. Il y a pour chaque instrument une constante à déterminer quand on veut obtenir les potentiels en valeur absolue.

73. *Électromètre capillaire de M. Lippmann.* — M. Lippmann a imaginé récemment un électromètre dont la sensibilité dépasse celle de l'électromètre à quadrant de M. Thomson, mais qui ne peut être employé que pour la mesure de très-faibles différences de potentiels. Il est fondé sur la variation qu'éprouve la dépression capillaire du mercure sous l'influence d'une force électromotrice *.

* La force électromotrice entre deux points n'est autre que la différence des potentiels de ces deux points.

Considérons (*fig.* 19) deux tubes verticaux, l'un AB à grand diamètre, l'autre CD capillaire, en communication l'un avec l'autre par un tube horizontal BC.

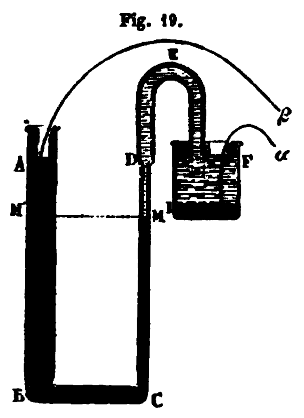


Fig. 19.

Si l'on remplit ces tubes de mercure, le niveau s'élève moins dans le tube capillaire, et il se forme en M une surface convexe, ou ménisque, due à ce que l'attraction moléculaire du mercure sur les particules situées à la surface l'emporte sur l'attraction des parois verticales du tube de verre. Il en résulte à la surface de M une pression verticale qui est mesurée par le poids d'une colonne de mercure dont la hauteur serait égale à la différence AM' des niveaux, c'est-à-dire à la dépression.

Cette dépression varie avec la section du tube capillaire et est proportionnelle à un coefficient qu'on nomme *constante capillaire*, qui dépend de la nature du liquide et de la matière dont le tube est formé.

Si l'on verse un liquide sur le mercure du tube capillaire, il se produit plusieurs effets; le poids du liquide abaisse naturellement le niveau du mercure, mais d'un autre côté l'attraction exercée sur le mercure par le liquide modifie la forme du ménisque, diminue sa pression verticale et soulève un peu le mercure qui prend une nouvelle position d'équilibre.

Cette dernière action est augmentée par l'affinité chimique. Si le liquide est de l'eau acidulée, le mercure tend à la décomposer pour s'unir à l'oxygène et à l'acide;

bien que la décomposition de l'eau n'ait pas lieu, il se produit une polarisation des molécules qui modifie la pression verticale du ménisque. Cet effet de polarisation est annulé lorsque, comme dans la figure, on recourbe le tube qui renferme l'acide de façon à faire plonger l'extrémité dans un vase F contenant de l'eau acidulée en contact avec une couche de mercure qui occupe le fond I; mais si l'on plonge dans le mercure du tube AB et dans celui du vase E deux fils métalliques et si l'on réunit les extrémités α et β de ces fils en intercalant entre elles une faible force électromotrice, cette dernière, bien qu'insuffisante pour décomposer l'eau, polarise les molécules et, en augmentant ou diminuant l'attraction à la surface du ménisque M, élève ou abaisse le niveau. Ainsi, lorsque α est en communication avec le pôle négatif d'un élément Daniell et β avec le pôle positif, un courant tend à se produire dans la direction βABMDFα; la polarisation élève le niveau M et par suite diminue la constante capillaire. Si, au contraire, on relie α au pôle positif et β au pôle négatif de l'élément Daniell, l'effet inverse a lieu, la constante capillaire augmente et le niveau M s'abaisse *. La variation de la constante se mesure soit par la variation de la dépression, soit par la force qu'il faudrait appliquer sur la surface A, avec une pompe à air par exemple, pour ramener le niveau au même point **.

La force électromotrice d'un élément Daniell fait varier la dépression capillaire de 0,35 de sa valeur.

* Réciproquement si par une pression exercée à la surface de A on fait varier le niveau M, il se développe une force électromotrice qui persiste pendant la durée du mouvement et qu'on peut mesurer en intercalant un galvanomètre entre α et β.

** Voir le *Journal de physique*, numéro de février 1874.

Ainsi, avec un tube de $0^{mm},32$ de rayon, la dépression, qui est de $0^{m},14$, devient $18^{mm},90$ sous l'influence d'un élément Daniell.

La constante capillaire varie d'une manière continue avec la force électromotrice. M. Lippmann a construit par points la courbe qui représente la relation entre ces deux grandeurs, et en a déduit une table qui donne la variation de la constante capillaire ou de la dépression correspondant à chaque valeur de la force électromotrice *.

On a donc ainsi un véritable électromètre qui permet de comparer deux forces électromotrices, pourvu qu'elles soient assez faibles pour ne pas décomposer l'eau acidulée, c'est-à-dire qu'elles soient de très-peu supérieures à celle d'un élément Daniell.

74. Afin d'obtenir une plus grande sensibilité, M. Lippmann a donné à son électromètre la forme suivante : AB (*fig.* 20) est un tube vertical d'environ 1 mètre de longueur ouvert à ses deux bouts, et terminé par un petit tube capillaire d'un centième de millimètre de diamètre. On verse dans ce tube une colonne de $0^{m},850$ de mercure qui est soutenue par la pression capillaire du ménisque qui se forme en M dans la partie effilée.

Le petit tube plonge par sa partie inférieure dans l'eau acidulée que contient le vase E, le fond de ce vase con-

* Pour calculer cette table, M. Lippmann s'est servi d'un élément Daniell dont le circuit était fermé métalliquement. En mettant deux des points du circuit en communication avec les fils α et β (*fig.* 19), et faisant varier la résistance entre ces deux points, on modifiait à volonté leur différence de potentiel et l'on mesurait la dépression capillaire correspondante à l'aide d'un cathétomètre.

La courbe est irrégulière; la constante capillaire augmente avec la force électromotrice de polarisation jusqu'à une certaine limite, puis diminue.

tenant du mercure; les deux fils α et β en communication avec le mercure du tube AB et du vase E servent d'électrodes.

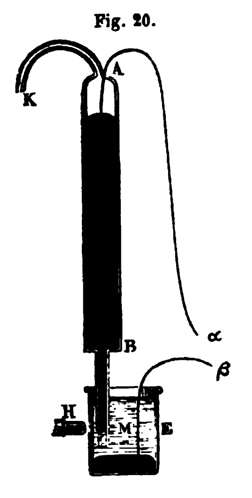


Fig. 20.

Un petit tuyau K arrive au sommet du tube AB et est en relation avec une petite pompe et un manomètre, qui permet de mesurer la pression; enfin en H est un microscope au moyen duquel on observe le niveau. On commence par comprimer un peu l'air dans le tube, à l'aide de la pompe, de façon que le sommet du ménisque coïncide avec un réticule tendu dans le microscope.

Pour mesurer une force électromotrice, on met le fil α en communication avec le pôle positif et le fil β avec le pôle négatif; le ménisque se soulève et l'on comprime de nouveau l'air de façon à ramener le niveau au point fixe. Le manomètre fait connaître la pression compensatrice, et l'on en déduit, en consultant la table de M. Lippmann, la force électromotrice.

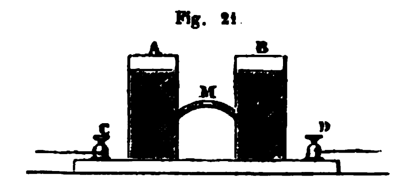
Pour de très-petites forces électriques on laisse la pression constante : on se borne à mesurer à l'aide d'un micromètre oculaire le déplacement du ménisque. On peut ainsi mesurer des millièmes et même des dix-millièmes de la force électromotrice d'un élément Daniell.

M. Siemens a donné à l'électromètre de M. Lippmann une forme simple et pratique, qui le rend facilement transportable et permet de l'employer sur les navires pour faire des expériences sur les câbles sous-marins.

Deux petits vases fermés A et B, remplis en partie de

mercure, sont en communication par un tube capillaire

Fig. 21



dans lequel on a introduit un petit index M d'acide sulfurique. Deux bornes C et D sont en communication, l'une avec le mercure du vase A, l'autre avec le mercure du vase B. Si l'on fait communiquer ces deux bornes avec les deux pôles d'une faible source électromotrice, ou l'une avec la terre et l'autre avec la source, l'index se déplace dans un sens ou dans l'autre suivant la direction du courant qui tend à se produire.

Condensateurs-étalons.

75. Pour mesurer les capacités électrostatiques on a besoin de condensateurs-étalons, c'est-à-dire de condensateurs dont la capacité soit exactement connue en fonction de l'unité.

Les sphères métalliques et les condensateurs à surfaces sphériques concentriques remplissent cette condition et sont même les seuls condensateurs rigoureusement absolus ; mais leur emploi dans la pratique présente quelques difficultés parce que d'une part les sphères isolées n'offrent qu'une très-faible capacité et que de l'autre il est difficile de réaliser des surfaces exactement sphériques et concentriques.

Deux plaques à surface plane situées à une très-petite distance l'une de l'autre forment un condensateur dont la capacité est connue approximativement en fonction de

l'étendue et de la distance des surfaces. Il offre sur les condensateurs sphériques l'avantage qu'en modifiant l'écartement on peut à volonté obtenir une variation continue de la capacité; de plus on peut obtenir et vérifier facilement des surfaces planes et avoir leur distance avec une très-grande précision à l'aide d'une vis micrométrique.

En nommant A l'étendue de la plaque électrisée, l'autre plaque étant en communication avec la terre et d la distance des deux surfaces, on a (n° 59) pour la capacité S

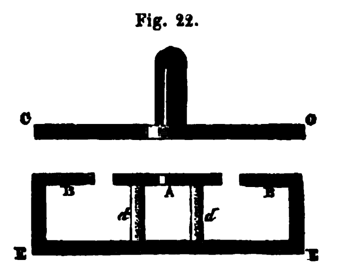
$$S = \frac{A}{4\pi d} *.$$

Toutefois cette formule n'est pas rigoureusement exacte parce que la densité augmente un peu sur les bords et que l'on néglige la charge répandue sur la surface extérieure du disque électrisé.

On obtient une approximation plus grande en adaptant au condensateur plan la disposition de l'anneau de garde imaginée par M. Thomson et déjà décrite au n° 70.

BABEE (*fig.* 22) est une boîte cylindrique en métal dont la face supérieure BAB est parfaitement plane

Fig. 22.



* Un condensateur circulaire qui aurait 40 centimètres de diamètre et dont les surfaces seraient distantes de 2 millimètres aurait une capacité égale à 5 unités électrostatiques absolues, c'est-à-dire à celle d'une sphère isolée de 5 mètres de rayon.

et comprend deux parties, un disque A supporté par deux tiges isolantes *dd* et un anneau de garde BB qui l'entoure et n'en est séparé que par un très-petit intervalle juste suffisant pour empêcher la production d'étincelles entre A et B. CC est un disque métallique dont la surface, également plane, est parallèle à AB. La distance des deux surfaces est réglée par une vis micrométrique.

On met la plaque C en communication avec la terre et le disque A, ainsi que la boîte BE avec une source électrique de potentiel connu V. L'électricité se distribue entièrement sur la surface extérieure de la boîte et du disque; sur ce dernier la densité est uniforme et la charge Q est $Q = \frac{VA}{4\pi d}$, ou en prenant pour A, comme nous l'avons déjà fait au n° 70, la moyenne entre la surface du disque et celle du cercle intérieur de l'anneau de garde, dont R et R' sont les rayons, $Q = \frac{V(R^2 + R'^2)}{8d}$.

On met alors la boîte BE en communication avec la terre; la distribution électrique change sur le disque A, ainsi que son potentiel, mais la charge Q reste la même, et si l'on mesure avec un électromètre le nouveau potentiel V', le rapport $\frac{Q}{V'}$ ou $\frac{V}{V'}\frac{(R^2 + R'^2)}{8d}$ donnera avec une très-grande exactitude la capacité du condensateur dont l'une des armatures est formée par le disque A, et l'autre par la plaque C et la boîte BE.

76. Dans la pratique on emploie pour étalons des condensateurs formés de feuilles d'étain superposées et séparées les unes des autres par des lames de mica, de caoutchouc ou de papier enduit de paraffine de façon à offrir une grande capacité sous un petit volume. Les

lames de rang pair sont reliées entre elles ainsi que les lames de rang impair et constituent les deux armatures.

La capacité d'un condensateur à diélectrique solide variant avec la durée de la charge, on adopte ordinairement pour l'évaluation de la capacité celle qui correspond à une durée d'une minute.

Un système complet d'étalons doit comprendre un certain nombre de condensateurs gradués de façon qu'en les réunissant convenablement on puisse avoir une capacité quelconque à une approximation déterminée par celle du plus petit des condensateurs. La combinaison la plus simple est celle d'une série de capacités croissantes suivant une progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16, 32, etc. *.

On peut même avoir une échelle continue de capacité en ajoutant à l'ensemble des condensateurs un système à capacité variable, formé, par exemple, de deux cylindres concentriques, l'un fixe et l'autre mobile dans le sens de son axe, de façon à recouvrir l'autre en tout ou en partie; la capacité de cet appareil est proportionnelle à la longueur commune aux deux cylindres **.

On établit ces condensateurs en les comparant à d'autres condensateurs-étalons déjà gradués ou à un condensateur absolu sphérique ou plan. Il suffit d'un seul condensateur étalonné pour obtenir toute la série : ce condensateur permet en effet d'en obtenir un second de même capacité; à l'aide des deux réunis on en forme un troisième dont la capacité est 2; ces trois condensateurs four-

* Les condensateurs-étalons qu'on emploie dans la pratique sont ordinairement gradués en fonction des unités absolues électro-magnétiques.

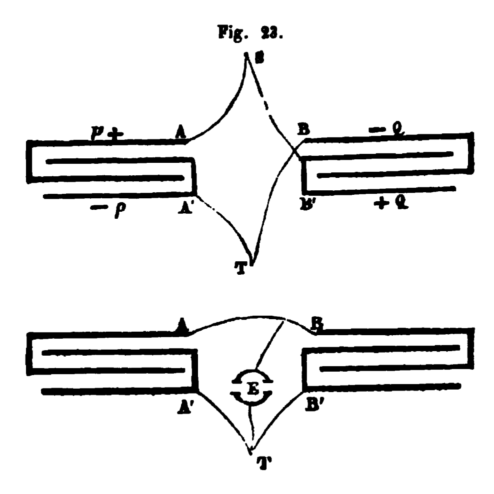
** Cet appareil est analogue aux rhéostats qu'on ajoute aux bobines de résistance quand on veut avoir une grande approximation. M. Gounelle a réalisé cette idée, en 1861, dans le cabinet de physique de l'Administration télégraphique.

nissent ensemble une capacité égale à 4, et ainsi de suite.

77. Le problème revient à établir un condensateur dont la capacité soit la même que celle d'un condensateur donné, ce qui peut s'effectuer de la manière suivante :

Soient AA' et BB' (*fig.* 23) les deux condensateurs; on

Fig. 23.



fait communiquer les deux armatures A et B' avec une même source électrique S et les deux autres armatures A' et B avec la terre T. A et A' se chargent de quantités égales et contraires d'électricité + P et — P, B et B' de quantités + Q et — Q; les deux condensateurs auront la même capacité si les charges P et Q sont égales. Pour reconnaître si cette condition est remplie, on enlève les communications avec la source, on met en relation avec la terre les armatures A' et B' et l'on relie entre elles et avec un électromètre très-sensible E les armatures A et B. Si la capacité de B est plus petite que celle de A, l'électromètre s'électrisera positivement et négativement dans le cas contraire. Il n'accusera aucune trace d'électricité si les deux capacités sont égales. On arrive

par tâtonnements à rendre la capacité de B égale à celle de A en augmentant ou en diminuant le nombre et l'étendue des feuilles métalliques.

Mesure des diverses grandeurs.

78. *Mesure du potentiel.* — Au moyen d'un électromètre absolu ou d'un électromètre gradué dont la constante a été déterminée, on peut mesurer directement le potentiel d'une source électrique ou celui d'un conducteur électrisé dont la capacité est assez grande pour que sa charge ne change pas sensiblement quand on le fait communiquer avec l'électromètre. Mais si le conducteur n'a qu'une faible capacité, son état électrique est modifié; une partie de son électricité passe dans l'électromètre qui donne la mesure du potentiel après le partage de la charge et non le potentiel primitif.

Du potentiel observé, on peut néanmoins déduire le potentiel primitif quand on connaît la capacité électrostatistique S du conducteur et celle de l'électromètre S'.

Soient V le potentiel observé et V_1 celui du conducteur avant l'expérience. L'équation de l'équilibre électrique (n° 63) donne $V_1S = V(S + S')$, d'ou

$$V_1 = \frac{V(S+S')}{S}.$$

On peut aussi obtenir par tâtonnements le potentiel d'un conducteur électrisé en chargeant l'électromètre jusqu'à ce que son potentiel soit égal à celui du corps essayé, c'est-à-dire jusqu'au moment où ses indications ne changent pas quand on le met en communication avec ce dernier. Cette méthode n'est applicable que lorsque le conducteur, après avoir été déchargé, peut être

indéfiniment replacé dans des conditions identiques, ainsi qu'il arrive dans certaines expériences.

79. *Potentiel en un point de l'air.* — Le potentiel en un point quelconque de l'air peut se mesurer à l'aide d'une sphère métallique de très-petit rayon par rapport à la distance du point aux corps électrisés qui forment le champ électrique ; on place cette sphère de façon que son centre coïncide avec le point donné, puis on la fait communiquer avec la terre par un long fil conducteur ; elle s'électrise par influence et son potentiel devient nul.

A ce moment on doit avoir, en nommant $V = \sum \frac{q}{r}$, le potentiel au centre de la sphère, dû aux masses électriques répandues dans l'espace, Q sa charge électrique et a son rayon

$$\sum \frac{q}{r} + \frac{Q}{a} = 0.$$

a et Q étant très-petits, l'introduction de la sphère dans le champ électrique ne modifie pas sensiblement la distribution de l'électricité, de sorte que $\sum \frac{q}{r}$ ou V peut être considéré comme représentant le potentiel primitif au point donné.

On isole la sphère et on la porte dans la salle d'expérience où l'on mesure son potentiel $\frac{Q}{a}$, qui est égal et de signe contraire à celui du point où son centre était placé.

C'est ainsi qu'on obtient le potentiel électrique aux divers points de l'atmosphère.

80. ***Mesure de la capacité électrostatique.*** — On peut employer plusieurs procédés pour la mesure de la capacité électrostatique d'un condensateur.

1° Quand il est possible de déterminer les valeurs ab-

solues d'une charge Q communiquée au condensateur et son potentiel V, on en déduit la capacité $S = \frac{Q}{V}$.

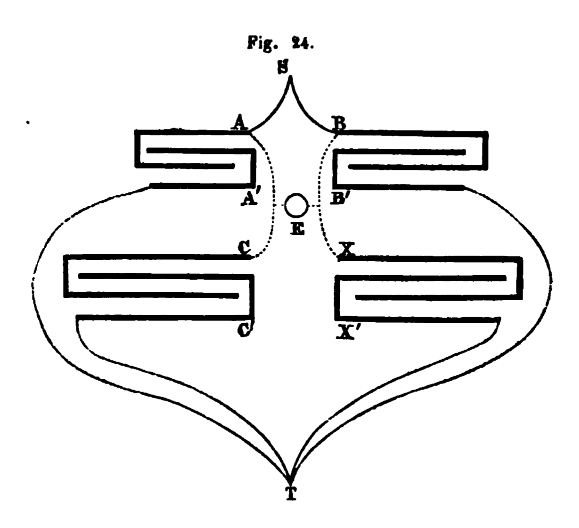
2° Si l'on a à sa disposition une série complète d'étalons gradués, on cherche, en appliquant le procédé indiqué au n° 74, la combinaison qui fournit une capacité égale à celle du condensateur.

3° Lorsqu'on ne dispose que de quelques étalons de capacité, on électrise avec une même source le condensateur et l'un des étalons de capacité S', et l'on compare, quand il est possible, leurs charges Q et Q'.

On a $\frac{Q}{S} = \frac{Q'}{S'}$, d'où l'on déduit $S = \frac{Q}{Q'} S'$.

4° On peut encore faire usage de la méthode suivante, analogue à celle qui est employée pour la mesure des résistances et est connue sous le nom de pont Wheatstone; elle suppose qu'on ait (*fig.* 24) deux condensa-

Fig. 24.



teurs AA' et BB' ayant des capacités *a* et *b* dont le rapport

est connu et un condensateur CC′ à capacité variable c. Soit XX′ le condensateur dont on veut mesurer la capacité x.

On commence par charger les deux condensateurs AA′ et BB′ en mettant en communication avec une même source électrique S les armatures A et B et les autres avec la terre T. On enlève les communications avec la source S et l'on relie entre elles les armatures A et C, B et X. Une partie de la charge des deux premiers condensateurs se répartit sur les deux autres. En nommant V le potentiel de la source, v celui des armatures A et C, v' celui des armatures B et X, on a

$$Va = v(a + c),$$
$$Vb = v'(b + x).$$

Si les deux potentiels v et v' sont égaux, on tire de ces deux équations

$$\frac{x}{c} = \frac{b}{a} \quad \text{ou} \quad x = \frac{ac}{b}.$$

Les potentiels v et v' sont égaux lorsque mettant les armatures B et X en communication avec l'un des électrodes d'un électromètre à quadrant E, les armatures A et C avec l'autre électrode, l'aiguille d'aluminium reste au repos.

L'opération consiste donc à faire varier la capacité c du condensateur variable cc' jusqu'au moment où cette condition est remplie.

Ces diverses méthodes sont applicables à l'étude des condensateurs à grande surface comme les câbles sous-marins.

5° Pour mesurer la capacité S d'un conducteur ou d'un condensateur de faible étendue, on cherche la diminution du potentiel qu'éprouve une charge communiquée

à ce conducteur quand on le met en communication avec un condensateur absolu ou de capacité connue.

Après avoir électrisé le conducteur et déterminé son potentiel V, on le fait communiquer par un long fil métallique avec un condensateur de capacité connue S′ et l'on mesure le nouveau potentiel V′ :

$$VS = V'(S + S'),$$

d'où

$$S = \frac{V'}{V - V'} \times S' \quad \text{ou} \quad S = \frac{1}{\frac{V}{V'} - 1} \times S.$$

Un simple électromètre gradué suffit pour l'expérience, car on a besoin de connaître seulement le rapport des potentiels V et V′ et non leur valeur absolue.

C'est par cette méthode qu'on trouve la capacité d'un électromètre. Après l'avoir chargé et observé son potentiel V, on le fait communiquer avec une sphère isolée dont on connaît le rayon a et l'on note le nouveau potentiel V′.

La capacité de l'électromètre est $\dfrac{a}{\frac{V}{V'} - 1}$.

81. ***Mesure de la quantité.*** — La quantité d'électricité répandue à la surface d'un conducteur, ou la charge, se mesure directement au moyen de la balance de torsion de Coulomb lorsque le conducteur est de très-faible dimension ; elle se déduit, en effet, de la force avec laquelle le conducteur attire ou repousse une petite sphère électrisée dont la charge a été déterminée d'avance (n° 67).

L'électricité, en traversant le fil d'un galvanomètre, fait dévier l'aiguille aimantée ; si la durée du passage du fluide est très-courte, l'aiguille reçoit une impulsion et décrit une oscillation dont l'amplitude per-

met de calculer la quantité d'électricité qui a traversé le fil*. On a ainsi une nouvelle méthode pour mesurer la charge électrique d'un conducteur, mais elle n'est applicable qu'à des charges considérables telles que celles qui sont répandues sur des condensateurs à grande surface. On peut notamment l'employer avec les câbles sous-marins. Le fil conducteur étant isolé à l'une de ses extrémités, on met l'autre pendant un instant en communication avec une source électrique par l'intermédiaire d'un galvanomètre et l'on observe l'oscillation de l'aiguille ; ou encore, après avoir chargé le fil conducteur, on le met en communication avec la terre pour le décharger par l'intermédiaire du fil du galvanomètre.

Dans la plupart des cas on ne peut faire usage d'aucune de ces deux méthodes, et la charge d'un conducteur doit se déduire de la capacité électrostatique et de son potentiel qu'on mesure par les procédés décrits précédemment.

DENSITÉ ET PRESSION ÉLECTRIQUES.

82. *Densité.* — On peut considérer l'électricité libre à la surface des corps conducteurs comme formant une petite couche dont l'épaisseur est plus petite que toute quantité appréciable, et dont la densité nous est inconnue. Le produit de ces deux grandeurs qui est seul mesurable constitue ce qu'on nomme la densité ou l'épaisseur de la couche électrique, et est égal au rapport de la masse électrique Q qui se trouve sur un petit élément à l'étendue ω de cet élément : $\delta = \frac{Q}{\omega}$.

On représente géométriquement la distribution de

* Nous reviendrons sur cette méthode de mesurer la charge d'un conducteur.

l'électricité en élevant aux divers points d'une surface électrisée des normales d'une longueur proportionnelle à δ, et dont l'ensemble forme un petit volume qui entoure le corps électrisé.

La densité de l'électricité aux divers points d'un conducteur peut se calculer directement dans quelques cas particuliers, et notamment lorsque, par suite de la forme régulière du corps électrisé, la distribution doit être uniforme. Elle se déduit alors de la charge et de la surface totale.

Ainsi, pour une sphère électrisée à l'abri de toute influence étrangère, dont la charge est Q et r le rayon, la densité est $\delta = \frac{Q}{4\pi r^2}$; si V est le potentiel de la charge, $Q = Vr$ et $\delta = \frac{V}{4\pi r}$.

Pour deux sphères concentriques de rayon R et r, la densité à la surface de la sphère intérieure est $\delta = \frac{VR}{4\pi r(R-r)}$, et à la surface de la sphère extérieure $\delta = \frac{Vr}{4\pi R(R-r)}$, V étant la différence du potentiel des deux sphères, ou le potentiel de l'une d'elles si l'autre communique avec la terre (n° 55).

Pour deux surfaces cylindriques concentriques indéfinies, situées à une distance d l'une de l'autre très-petite par rapport aux rayons, la densité est la même sur les deux surfaces et a pour valeur (n° 57) : $\delta = \frac{V}{4\pi d}$.

Enfin, pour deux plans parallèles indéfinis dont la distance est d, la densité est aussi : $\delta = \frac{V}{4\pi d}$ *.

* Cette expression pour des plans parallèles a été trouvée en assimi-

Lorsque le conducteur est de forme irrégulière, on obtient la densité en un point quelconque au moyen du plan d'épreuve de Coulomb. Un petit disque de clinquant appliqué sur la surface du corps se confond avec elle et prend sur sa surface extérieure toute la charge de la partie qu'il recouvre; quand on l'éloigne, il emporte cette charge qui se distribue sur ses deux faces. On mesure au moyen de la balance de torsion la quantité totale d'électricité qu'il contient; le rapport de cette quantité à la surface donne la densité au point touché.

83. *Force résultante à la surface d'un conducteur.* — La force qui agirait en un point donné sur l'unité de quantité d'électricité, ou la résultante des actions exercées en ce point par toutes les masses électriques qui forment un champ est normale à la surface de niveau qui passe par ce point et a pour valeur $\frac{V - V'}{n}$, V et V' étant les potentiels au point considéré et en un point situé sur la normale à la surface de niveau, à une très-petite distance n (n° 42).

Cette résultante est nulle pour tout point de l'intérieur d'un conducteur. Lorsque le point est à l'extérieur, mais à une distance infiniment petite de la surface, elle peut s'exprimer très-simplement en fonction de la densité de la couche électrique.

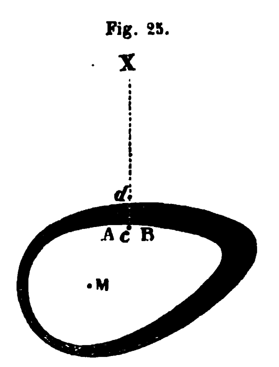
On a vu (n° 70) qu'une couche de densité uniforme δ répandue sur un plan exerce sur une masse q située en

lant les deux plans parallèles à deux surfaces cylindriques très-voisines (n° 59). On peut aussi la déduire de la formule relative aux sphères concentriques. Deux plans voisins pouvant être considérés comme deux surfaces sphériques dont les rayons R et r sont infiniment grands. $R - r$ étant égale à d, la formule $\delta = \frac{VR}{4\pi r(R - r)}$ devient $\delta = \frac{V}{4\pi d}$.

dehors de ce plan une force répulsive, normale au plan, et qui a pour valeur $2q\delta\pi$, ou $2\pi\delta$ si la masse q est égale à l'unité de quantité. Cette force est indépendante de la distance du plan au point extérieur; si ce dernier est placé à une distance infiniment petite de la couche électrique, la force est la même et égale à $2\pi\delta$, mais elle est uniquement due à la portion du plan située dans le voisinage du point.

Considérons maintenant un corps conducteur électrisé M (*fig.* 25) faisant partie d'un champ, et un petit élément AB de sa surface. L'action totale exercée en un point quelconque par le champ électrique peut se diviser en deux, celle de l'élément AB, et celle de toutes les autres masses électriques répandues soit sur M, soit sur les conducteurs environnants.

Fig. 25.



Ces deux actions doivent se faire équilibre pour un point c situé à l'intérieur du corps M; elles s'ajoutent au contraire pour un point extérieur d.

Si les deux points c et d sont très-voisins de la surface, l'élément agit sur eux comme un plan recouvert d'une couche de densité uniforme et produit sur l'unité de masse électrique concentrée en d une force, dirigée suivant dX, égale à $2\pi\delta$, et sur l'unité de masse concentrée en c une force égale et de signe contraire égale à $-2\pi\delta$.

Le reste de la surface M et du champ électrique devant développer au point c une force égale et de signe contraire à cette dernière, leur action est égale à $2\pi\delta$; elle

est aussi égale à $2\pi\delta$ au point d, dont la distance au point c est extrêmement petite.

Ce dernier est donc soumis à une forcee totale Φ, qui a pour valeur $\Phi = 4\pi\delta$.

Ainsi, suivant qu'on considère un point situé à l'intérieur d'un conducteur électrisé ou un point extérieur très-voisin, la force résultante φ est o ou $4\pi\delta$. Elle passe très-rapidement de l'une à l'autre valeur pour les points intermédiaires, à mesure que l'on traverse la couche *.

Cette force est d'ailleurs une grandeur de convention qu'on ne peut ni réaliser ni mesurer par l'expérience.

84. *Pression électrique.* — La couche électrique répandue sur un conducteur est soumise en chaque point à une force normale qui tend à l'éloigner de la surface et produit une pression contre l'air ou la matière isolante qui l'entoure.

Pour connaître la force à laquelle est soumise la portion de la couche qui recouvre un petit élément AB (*fig.* 25), on remarque que si elle était remplacée par l'unité de quantité d'électricité, la force résultante due à toutes les autres masses électriques du champ et qui agit dans la direction cdX serait égale à $2\pi\delta$. La masse qui recouvre l'élément AB, au lieu d'être égale à l'unité de quantité, est $\omega\delta$, ω étant l'étendue de l'élément et δ la densité de la couche ; la force à laquelle elle est soumise est donc $2\pi\delta \times \omega\delta$, ou $2\pi\omega\delta^2$.

Le rapport de cette force à l'étendue ω de la surface, ou la force rapportée à l'unité de surface, est la pression électrique : $\Psi = 2\pi\delta^2$ **.

* L'épaisseur de la couche électrique, bien que plus petite que toute grandeur mesurable, n'est cependant pas infiniment petite dans le sens mathématique du mot.

** Dans plusieurs traités d'électricité, on trouve pour la pression électrique l'expression $4\pi\delta^2$ qui n'est pas exacte.

Lorsque la densité δ est connue en unités absolues, cette expression représente la force *absolue* qui agit sur le corps isolant par unité de surface.

Soit par exemple une sphère isolée électrisée au potentiel V, la densité est $\delta = \frac{V}{4\pi r}$, et la pression $\Psi = \frac{V^2}{8\pi r^2}$.

Si les unités fondamentales adoptées sont le mètre, la seconde est la masse du centimètre cube d'eau, et si V et r sont donnés en fonction de ces unités, la formule fait connaître la pression par mètre carré en fonction de l'unité absolue de force, qu'on peut transformer en grammes en multipliant le résultat par $0^{gr},1019$ (n° 26).

Cette force, en agissant sur l'air environnant, produit à la surface du corps électrisé le même effet qu'une diminution de la pression atmosphérique. Si la sphère était extensible, comme le serait par exemple une bulle de savon, son rayon augmenterait et il s'établirait un nouvel équilibre entre la pression de l'air à l'intérieur, la pression extérieure diminuée de la pression électrique et les forces moléculaires.

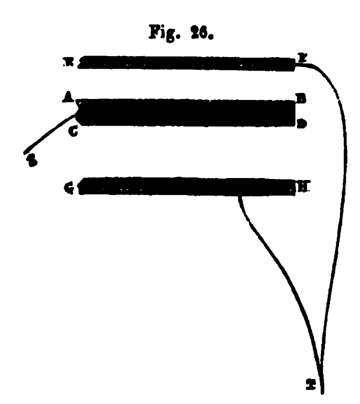
Lorsqu'on augmente le potentiel V, ou que le rayon r de la sphère diminue, il arrive un moment où la pression Ψ est égale à la pression atmosphérique, dont la valeur est d'environ 10.000 kilogrammes par mètre carré, ou 10^8 unités absolues de force. En posant $10^8 = \frac{V^2}{8\pi r^2}$, on trouve à peu près $\frac{V}{r} = 50.000$, équation qui donne le rayon minimum de la sphère sur la surface de laquelle peut être maintenue par l'air atmosphérique une couche électrique au potentiel V ou le potentiel maximum V de la couche qui peut rester sur une sphère de rayon r.

85. Les pressions électriques se font équilibre pour

un corps électrisé qui n'est soumis à aucune influence étrangère; mais si des conducteurs sont placés dans le voisinage, la distribution de l'électricité est modifiée par l'induction et l'équilibre n'existe plus.

Prenons comme exemple un disque plan projeté en ABCD (*fig.* 26), en communication avec une source élec-

Fig. 26.



trique S au potentiel V et placé entre deux disques EF et GH reliés à la terre.

La densité est nulle sur la face extérieure du disque EF; sur l'autre face et sur la surface AB, elle est égale à $\frac{V}{4\pi d}$, d étant la distance des deux surfaces.

Une lame isolante séparant les deux disques serait soumise de chaque côte, en sus de la pression atmosphérique, à une pression Ψ égale à $\Psi = 2\pi\delta^2 = \frac{V^2}{8\pi d^2}$ par unité de surface.

Si l'espace interposé est de l'air, le disque EF est soumis d'un côté à la pression atmosphérique et de l'autre à une pression égale diminuée de la pression électrique, et si son étendue est A, il est attiré vers le disque ABCD

avec une force égale à $\frac{V^2A}{8\pi d^2}$. De même si d' est la distance qui sépare la surface CD du disque CH, ce dernier est attiré par la surface CO avec une force égale à $\frac{V^2A}{8\pi d'^2}$.

Quant au disque ABCD, la force qui agit sur lui est due à la différence de pression sur les deux surfaces, elle est : $\frac{V^2A}{8\pi}\left(\frac{1}{d^2}-\frac{1}{d'^2}\right)$.

Si le disque CH est supprimé, ou situé à une très-grande distance, les deux disques EF et ABCD sont attirés l'un vers l'autre par une force égale à $\frac{V^2A}{8\pi d^2}$. Cette force f peut se mesurer directement et, lorsque A et d sont connus, on en déduit le potentiel V, $V = d\frac{\sqrt{8\pi f}}{A}$.

C'est sur cette formule que reposent les électromètres à disques et notamment l'électromètre absolu de M. Thomson.

86. *Décharge disruptive.* — Lorsque la pression électrique sur deux surfaces voisines dépasse la résistance du milieu qui sépare ces surfaces, les fluides contraires se rejoignent violemment en déplaçant les molécules du diélectrique ; il se forme comme une fissure par laquelle s'écoule à peu près instantanément presque toute la charge des conducteurs ; cette décharge produit une étincelle dont le bruit est dû à la compression de l'air, et l'éclat à des particules solides entraînées par l'électricité et portées à une haute température.

La distance à laquelle éclate l'étincelle entre deux conducteurs dépend de la pression électrique et de la résistance mécanique que le milieu oppose à la décharge * ;

* Cette résistance mécanique à la décharge est complétement différente de la résistance électrique qui donne lieu aux lois d'Ohm.

la pression varie elle-même avec le potentiel ou la charge des conducteurs en présence, avec leur éloignement et leur forme. Pour deux surfaces convexes, c'est aux points les plus rapprochés que la densité, et par suite la pression, a sa plus grande valeur; c'est donc entre ces points que doit éclater l'étincelle, à moins que dans le voisinage il ne se trouve des portions de surface à courbure plus grande, sur lesquelles s'accumule l'électricité.

Lorsque la densité est uniforme, ainsi que cela a lieu pour deux surfaces planes, l'étincelle éclate entre les points pour lesquels une légère aspérité ou une cause accidentelle quelconque entraîne la rupture de l'équilibre.

Quant à la résistance mécanique du milieu gazeux, elle est d'autant moindre que sa pression est plus faible; elle est également variable avec la nature du gaz, car les molécules matérielles interviennent dans le phénomène de la décharge disruptive dont les lois sont très-complexes.

Nous n'insisterons pas sur ces phénomènes; nous nous bornerons à faire remarquer que la résistance opposée de la décharge par un milieu gazeux diminue rapidement avec l'épaisseur de ce milieu contrairement à ce qu'on aurait pu croire. Ainsi, d'après les expériences de M. Thomson, l'étincelle éclate dans l'air entre deux disques parallèles à une distance de $0^{mm},00254$ pour une pression électrique de $11^{g},290$ par centimètre carré; à une distance de $0^{mm},40$ pour une pression de $0^{g},921$, à une distance de $1^{mm},22$ pour une pression de $0^{g},696$ *.

Ce fait explique comment pendant les orages il se produit des étincelles ou éclairs de plusieurs kilomètres de

* Dans ces expériences, la pression était déduite du potentiel déterminé au moyen de l'électromètre absolu, et de la distance des deux disques au moment où se produisait l'étincelle.

longueur, bien qu'à la surface de la terre la pression électrique ne soit pas sensible.

87. *Tension électrique.* — Nous avons évité d'employer le mot *tension* qui n'a pas de signification bien précise. On applique souvent ce nom au potentiel électrique ; quelques auteurs s'en servent pour représenter l'action répulsive à laquelle serait soumise à la surface d'un corps l'unité de quantité d'électricité, que nous avons nommée force résultante (n° 83). Enfin d'autres appellent tension la pression électrique rapportée à l'unité de surface. Ces trois grandeurs sont essentiellement différentes.

Imaginons une sphère de rayon $R = 0^m,05$ à la surface de laquelle est répandue une quantité d'électricité égale à 1,50 unités, c'est-à-dire telle que concentrée en un point elle repousserait une quantité égale située à une distance de 1 décimètre avec une force absolue égale à $\left(\frac{1,50}{0,1}\right)^2 = 225$ ou à $22^g,5$. Le potentiel de la charge est $\frac{Q}{R} = \frac{1,50}{0,05} = 30$.

La densité δ ou la charge par mètre carré est $\delta = \frac{Q}{4\pi R^2} = \frac{1,50}{4\pi \times 0,05^2} = 47$.

La force résultante Φ exercée sur l'unité de quantité à la surface du corps est $\Phi = 4\pi\delta = 600$, c'est-à-dire 600 absolus de force, ou environ 60 grammes.

Enfin la pression exercée contre l'air par mètre carré est $\Psi = 2\pi\delta^2 = 14.330$ ou 1.433 grammes. Par centimètre carré cette pression serait $0^g,1433$.

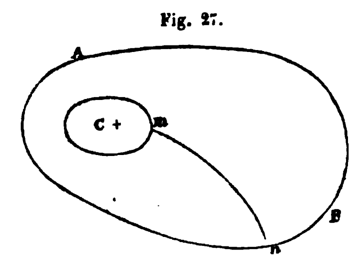
Énergie électrique.

88. Un système de corps électrisés ne peut revenir à l'état neutre qu'à la suite d'un mouvement des fluides

électriques et, par conséquent, d'un développement de travail produit par leurs forces attractives et répulsives; le système contient donc une certaine quantité d'énergie qui est à l'état potentiel tant que l'équilibre électrique subsiste et qu'on peut évaluer.

On se rend aisément compte du travail que peut développer l'électricité répandue sur un corps conducteur par le raisonnement suivant :

Fig. 27.



Considérons (*fig.* 27) un corps électrisé C entouré d'une enveloppe conductrice AB; soit V le potentiel du corps C et V' celui de l'enveloppe. Si Q est la quantité d'électricité que contient A, une quantité égale et de signe contraire —Q est répandue sur la surface intérieure de l'enveloppe; en nommant S la capacité électrostatique qui correspond à la position respective de C et de l'enveloppe, on a : $Q = S(V - V')$, ou $Q = SV$ si V' est nul.

On a vu (n° 41) qu'une masse d'électricité égale à l'unité de quantité, en se transportant d'un point à un autre de l'espace, développe, sous l'influence des forces électriques, un travail mécanique numériquement égal à la différence des potentiels des deux points; en passant d'un point quelconque *m* du corps C à un point *n* de l'enveloppe, l'unité de masse électrique produit donc un travail égal

à $V-V'$ quel que soit le chemin parcouru entre les points m et n. Si la masse électrique qui se meut de m à n est q, au lieu d'être l'unité de quantité, le travail développé est $q(V-V')$. Une masse égale d'électricité négative qui se transporterait de l'enveloppe au corps A développerait la même quantité de travail $-q(V'-V)$ ou $q(V-V')$. Lorsque l'enveloppe est en communication avec la terre, V' est nul et le travail de la masse q devient qV.

Supposons que le corps A se décharge peu à peu par des transports successifs de petites masses électriques passant du corps à l'enveloppe, que ces petites masses soient toutes égales à q, et qu'on ait $nq = Q$, n étant un nombre très-grand : le potentiel V du corps A, qui était primitivement égal à $\frac{Q}{S}$, deviendra successivement $\frac{Q-q}{S}$, $\frac{Q-2q}{S}$, $\frac{Q-3q}{S}$, etc. Quant au travail développé par les masses q pendant leur mouvement du corps C à l'enveloppe, il sera

$$\frac{Q-q}{S}\times q, \quad \frac{Q-2q}{S}\times q, \quad \frac{Q-3q}{S}\times q, \text{ etc.}$$

En faisant la somme on obtient pour le travail total

$$\frac{Q-\frac{nq}{2}}{S}\times nq, \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2}\frac{Q^2}{S},$$

qu'on peut mettre sous la forme $\frac{1}{2}VQ$, ou encore $\frac{1}{2}V^2S$, puisque $Q = VS$*.

89. Dans la *fig.* 27, le corps A peut représenter l'arma-

* On arriverait au même résultat en supposant des masses q, q', etc. inégales, qui seraient chaque fois une même petite fraction de la charge du conducteur.

ture intérieure d'un condensateur dont l'armature extérieure est AB ou un corps isolé au milieu d'une enceinte plus ou moins éloignée.

L'énergie électrique d'un conducteur ou d'un condensateur, c'est-à-dire la quantité de travail ou de force vive qu'il développe quand on le décharge, est donc égale à la moitié du produit de sa charge par son potentiel.

Réciproquement pour charger le corps A au potentiel V par le transport de petites masses électriques de l'enveloppe à ce corps, il faudrait dépenser une quantité de travail égale à $\frac{1}{2} V^2 Q$.

Le résultat serait le même si le fluide négatif passait de l'enveloppe au corps C, ou si l'on admettait un double mouvement du fluide positif du corps et du fluide négatif de l'enveloppe.

On peut réaliser ce mode de décharge d'un condensateur au moyen d'une petite balle suspendue à un fil isolant mobile entre les deux armatures d'une bouteille de Leyde. La balle passe de l'une à l'autre armature en se chargeant et se déchargeant à chaque contact et décrivant une série d'oscillations; sa force vive se transforme en vibrations communiquées à l'air, aux armatures métalliques contre lesquelles elle vient butter et à l'axe de suspension, et ces vibrations se dissipent sous forme de son et de chaleur. Si l'on pouvait mesurer la force vive ainsi transformée, on trouverait qu'elle est équivalente à $\frac{1}{2} QV$.

Ordinairement on effectue la décharge d'un condensateur d'un seul coup au moyen d'un excitateur. Le fluide électrique s'écoule à peu près instantanément en produisant une étincelle et une détonation. Une partie de

l'énergie électrique est employée à vaincre la résistance de l'air, à le mettre en vibration et à produire l'étincelle ; l'autre partie échauffe les conducteurs en se transformant en chaleur, ou donne lieu à des effets mécaniques, physiques et chimiques, tels que la désagrégation des matières solides, la décomposition des substances salines, etc.

La chaleur développée par la décharge ne se distribue pas également dans l'étendue du trajet suivi par l'électricité; les parties du circuit qui offrent le plus de résistance au passage de l'électricité sont celles qui absorbent le plus de chaleur ou d'énergie. Lorsque le conducteur qu'on emploie pour opérer la décharge est un fil gros et court, l'étincelle est énergique et l'échauffement du conducteur est très-faible. Quand au contraire le fil est long et fin, l'étincelle est faible et le fil s'échauffe davantage. Il arrive même, lorsque le fil offre une très-grande résistance, que le travail absorbé par l'étincelle est négligeable et que l'énergie électrique est employée presque entièrement à échauffer le fil, qui absorbe une quantité de chaleur équivalente à l'énergie du condensateur, c'est-à-dire à $\frac{1}{2}QV$, ou à $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{S}$; elle est proportionnelle au carré de la charge, et pour une même charge en raison inverse de la capacité S, ainsi que M. Riess l'a trouvé par l'expérience.

90. Lorsque le champ électrique comprend un certain nombre de corps électrisés, le travail développé par les masses électriques pour passer d'un état donné à l'état neutre, qui représente l'énergie totale, est égal à la moitié de la somme des produits des charges des divers corps par leurs potentiels. Si Q, Q', Q'', etc., sont les charges des corps, V, V', V'', etc., les potentiels, l'énergie W du

système est :

$$W = \frac{1}{2}(QV + Q'V' + Q''V'' + \ldots).$$

On trouve cette formule en supposant un petit déplacement des masses électriques, et en considérant le travail effectué par chacune d'elles sous l'influence des forces auxquelles elle est soumise. On peut aussi y arriver par un raisonnement analogue au précédent, en supposant que l'on décharge peu à peu le système en enlevant en chaque point de petites quantités d'électricité proportionnelles à la densité de façon que le potentiel décroisse partout suivant la même loi *.

Lorsqu'un corps est resté isolé pendant la charge, il ne peut être électrisé que par influence et contient des quantités égales des deux fluides contraires. La charge Q est nulle et par suite le terme correspondant dans l'expression de l'énergie est nul. Il en est de même pour un corps en communication avec la terre, puisque son potentiel V est égal à zéro.

Quand, par suite d'une circonstance quelconque, la situation électrique des corps est modifiée, ce qui arrive

* On donne souvent le nom de *fonction potentielle* à la fonction $V = \sum \frac{q}{r}$ et celui de *potentiel d'un système sur lui-même* tantôt au produit $\sum Vq$ de chaque masse par son potentiel, tantôt à la moitié de ce produit $\frac{1}{2} \sum Vq$. Il nous paraît préférable de conserver le nom de potentiel électrique, ainsi que la plupart des électriciens en ont pris l'habitude depuis quelque temps, et que nous l'avons fait jusqu'ici, à la somme de rapports $\frac{q}{r}$, ou V, qui se rapporte à un état spécial de l'électricité, et d'affecter à la somme des produits $\frac{1}{2}Vq$ la désignation d'énergie potentielle d'un système électrisé.

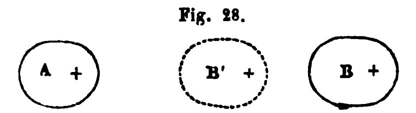
s'ils sont déplacés ou si l'on met en communication quelques-uns d'entre eux, il s'établit un nouvel état d'équilibre auquel correspond une nouvelle quantité d'énergie W_1. Les charges des corps devenant Q_1, Q'_1, Q''_1, et les potentiels V_1, V'_1, V''_1, la valeur de W_1 est

$$W_1 = \frac{1}{2} (Q_1V_1 + Q'_1V'_1 + Q''_1V''_1 \ldots).$$

Si W est plus grand que W_1, une certaine quantité d'énergie s'est perdue et a dû se transformer en chaleur absorbée par les fils conducteurs ou en travail dépensé pour faire mouvoir les corps électrisés. Dans le cas contraire, c'est-à-dire si W_1 est plus grand que W, il y a accroissement d'énergie électrique, accroissement auquel doit correspondre, en vertu du principe de la conservation de la force, la disparition d'une quantité équivalente de chaleur ou de travail, empruntée aux forces de la nature par l'intermédiaire de machines, de la force musculaire, de combinaisons chimiques comme dans les piles, etc.

91. Soient, par exemple, deux corps A et B (*fig.* 28)

Fig. 28.



électrisés positivement, et qui contiennent des quantités d'électricité Q et Q' aux potentiels V et V' : ils possèdent ensemble une énergie électrique W égale à $\frac{1}{2}$ (QV + Q'V').

Pour rapprocher le corps B de A et l'amener en B', on est obligé de vaincre la répulsion des fluides positifs et de développer un certain travail, qui doit se retrouver à

l'état potentiel sous forme d'une augmentation d'énergie électrique, et en effet, par suite de ce rapprochement, les potentiels des deux corps A et B augmentent; V_1 et V_1' étant leurs nouvelles valeurs, l'énergie devient $W_1 = \frac{1}{2}(QV_1 + Q'V_1')$. La différence $W_1 - W$ est égale au travail qu'il a fallu dépenser pour amener le corps B en B',

$$W_1 - W = \frac{1}{2}[Q(V_1 - V) + Q'(V'_1 - V')].$$

Concevons encore deux sphères dont une seule, de rayon R, est électrisée et contient une quantité Q d'électricité au potentiel V, l'autre, de rayon r, étant à l'état neutre et située à une assez grande distance pour ne pas être influencée par la première. La quantité totale d'énergie est $W = \frac{1}{2}QV$, ou $W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R}$, puisque la capacité électrostatique de la sphère est égale au rayon R. On met les deux sphères en communication au moyen d'un long fil conducteur; la charge se répartit sur les deux sphères, et l'énergie électrique devient $W_1 = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{R+r}$.

La perte d'énergie est

$$W - W_1 = \frac{1}{2}\frac{R(R+r)}{rQ^2}.$$

Le travail correspondant à cette perte est équivalent à la chaleur absorbée par le conducteur pendant le passage de l'électricité.

92. L'énergie d'un système électrisé ne dépend donc pas seulement de la quantité de fluide libre qu'il contient, mais du produit des masses électriques par leur potentiel.

Dans l'exemple de la *fig.* 28, un travail extérieur augmente l'énergie électrique sans que la quantité totale de fluide libre répandu sur les deux corps A et B soit changée; dans celui des deux sphères, au contraire, un certain travail ou son équivalent en chaleur est produit sans diminution de la quantité d'électricité libre.

Quelquefois, il est vrai, les fluides électriques semblent disparaître, c'est ce qui arrive quand on réunit deux conducteurs ayant des charges égales et de signe contraire, mais la disparition n'est qu'apparente; les effets des deux fluides sont seulement neutralisés, ou, dans l'hypothèse d'un seul fluide, il est ramené à un état normal qui constitue l'état neutre.

En somme, l'électricité se comporte comme une masse pesante qui, en tombant d'un niveau supérieur à un niveau inférieur, développe une quantité de travail égale au produit de la masse par la différence des niveaux, ou encore comme un gaz comprimé ou dilaté qui revient à sa pression normale en produisant un travail.

Le coefficient $\frac{1}{2}$, qui se trouve devant le produit VQ pour représenter l'énergie d'un corps électrisé, tient à ce que l'électricité s'écoulant à la façon d'un fluide, pendant la première partie du mouvement le potentiel est supérieur à $\frac{1}{2}$ V et lui est inférieur pendant la seconde partie; de même que pour avoir le travail produit par une masse d'eau s'écoulant d'un cylindre, on multiplie la masse totale par le niveau moyen.

C'est donc à tort qu'on emploie souvent les expressions *transformation de la chaleur ou du travail en électricité*, ou réciproquement *transformation de l'électricité en chaleur ou en travail.*

Il n'existe pas en réalité d'équivalent mécanique pour la quantité d'électricité, comme il en existe pour la chaleur; son rôle consiste seulement à emmagasiner la force vive. Le travail ou la chaleur ne se transforment pas plus en électricité qu'ils ne se transforment en gaz ou bien en corps solide, quand on comprime le premier ou qu'on élève le second à une certaine hauteur.

Quant au produit de la quantité par le potentiel, il est équivalent à un travail et la moitié de ce produit donne en unités absolues la valeur de cet équivalent, qu'on peut transformer en unités ordinaires, kilogrammètres ou calories.

Résultats et applications numériques.

93. *Potentiel des piles voltaïques.* — Pour résoudre les problèmes d'électricité statique, il est nécessaire de connaître en unités électrostatiques absolues la valeur du potentiel de la source électrique dont on fait usage.

La différence des potentiels aux deux pôles d'un élément Daniell, ou le potentiel du pôle positif lorsque le pôle négatif est à la terre, a été déterminée avec soin au moyen de l'électromètre absolu de M. Thomson par plusieurs physiciens qui ont trouvé, en admettant pour unité de longueur le centimètre, pour unité de masse celle du gramme et pour unité de temps la seconde, le chiffre 0.00374 (*).

En adoptant, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le mètre pour unité de longueur, le potentiel d'un élément Daniell est 0,000374 (**).

(*) Voir: *Reprint of papers on Electricity and Magnetism by sir William Thomson*, et *Electricity and Magnetism by Fleeming Jenkin.*

(**) Les dimensions du potentiel étant $V = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$ (n° 48), l'unité

Le potentiel d'une pile étant d'ailleurs proportionnel au nombre des éléments dont elle est composée, celui d'une pile de 10 éléments Daniell est 0,00374, celui d'une pile de 1.000 éléments 0,374, etc.

Quant aux autres piles, le potentiel de chaque élément est égal à celui d'un élément Daniell, 0,000374, multiplié par le chiffre qui représente sa force électromotrice par rapport à celle de l'élément Daniell, rapport qu'on détermine soit au moyen d'un électromètre, soit par des procédés galvanométriques (*). Pour l'élément Grove ou Bunsen, la force électromotrice est égale à celle d'un élément Daniell multipliée par 1,80. Le potentiel est donc $1{,}80 \times 0{,}000374$ ou 0,006732. Pour l'élément à sulfate de mercure de M. Marié Davy, la force électromotrice $= 1{,}40$ Daniell et le potentiel $= 0{,}000524$.

94. L'attraction qu'exercent l'un sur l'autre deux disques plans parallèles situés à une distance d l'un de l'autre et en communication avec les deux pôles d'une pile dont le potentiel est V, est donnée en unités absolues de force, pour une surface A par la formule $\frac{AV^2}{8\pi d^2}$ (n°s 70 et 85). Si la pile est composée de 1.000 éléments Daniell, l'attraction par décimètre carré pour deux disques distants de 1 millimètre sera : $\frac{0{,}01\,(0{,}374)^2}{8.\pi\,(0{,}001)^2} = 56$ unités absolues de force, ou $5^{gr},7$.

95. Une petite sphère de 1 centimètre de diamètre, électrisée par une pile de 1.000 éléments Daniell, contiendrait une quantité d'électricité égale, à $0{,}005 \times$

devient 10 fois plus grande lorsque l'unité fondamentale de longueur, L, augmente dans le rapport de 1 à 100, et par suite le nombre qui représente une grandeur déterminée devient 10 fois plus petit.

(*) Ce rapport pour les diverses piles usuelles se trouve dans tous les traités de physique.

$\times 0{,}374 = 0{,}00187$ unités de quantité (*) ; la répulsion qu'elle exercerait sur une autre petite sphère, ayant une charge égale, et située à 1 décimètre de distance, serait $\frac{(0{,}00187)^2}{(0{,}10)^2} = 0{,}00035$ unités absolues de force, ou $0^{gr},000036$.

Un condensateur à air de 1 mètre carré d'étendue, et dont les armatures sont distantes de 1 millimètre, a pour capacité électrostatique $S = \frac{1}{4\pi \times 0{,}001}$; chargé par une pile de 1.000 éléments Daniell, il contiendrait une quantité d'électricité égale à $\frac{0{,}374}{4\pi \times 0{,}001} =$ $= 29{,}9$ unités.

Supposons encore qu'on charge avec une pile de 10 éléments Daniell un câble sous-marin tel que le câble transatlantique français dont la capacité électrostatique par kilomètre est 1.523 (n° 64) : sa charge par kilomètre sera $1.523 \times 0{,}00374 = 5{,}70$, et la charge totale du câble, dont la longueur est d'environ 4.000 kilomètres, sera 22.800.

Cette charge concentrée en un point repousserait une charge égale située à 10 mètres de distance avec une force absolue égale à $\frac{(22.800)^2}{100} = 5.198.400$, soit environ 520 kilogrammes, et la même charge à un mètre de distance avec une force de 52.000 kilogrammes !

96. *Potentiel des machines électriques.* — Le potentiel que peut développer une machine électrique dépend de sa forme, de la force mise en jeu, de l'isolement plus

(*) La quantité d'électricité que contient la sphère est égale au produit VS du potentiel V par la capacité S, qui est égale au rayon.

ou moins grand des conducteurs, et enfin de l'état hygrométrique de l'air ambiant.

Suivant M. Thomson, les bonnes machines à frottement, qui donnent des étincelles de 3 décimètres de longueur, ont un potentiel correspondant à peu près à celui d'une pile de 80 à 100.000 éléments Daniell. En prenant 80.000 on est conduit, pour la valeur absolue du potentiel développé, à $80.000 \times 0,000374$ ou 29,92, soit à peu près 30 unités. Ce chiffre peut être dépassé avec certaines machines, mais on peut l'admettre comme représentant approximativement le potentiel que l'on obtient dans les expériences de cabinet avec les machines dont on fait habituellement usage pour charger les batteries électriques.

Deux disques plans situés à 1 millimètre de distance et dont l'un serait électrisé à ce potentiel, tandis que l'autre serait relié à la terre, s'attireraient avec une force qui, par décimètre carré, serait égale à $\frac{0,01(30)^2}{8\pi \times (0,001)^2} =$ $= 360.000$ unités absolues ou 36.700 grammes. Par centimètre carré cette force serait 367 grammes.

Si les deux disques sont séparés par une lame de verre, dont le pouvoir inducteur spécifique est 1,80, la charge des disques augmente dans le rapport de 1,80 à 1, et leur attraction par centimètre carré devient 660 grammes. Chacune des faces de la lame de verre est donc soumise, en sus de la pression atmosphérique qui est de 1 kilogramme par centimètre carré, à une pression de 660 grammes. Pour une épaisseur de verre de 2 millimètres, la pression électrique serait réduite au quart, c'est-à-dire à 185 grammes.

97. La charge d'une sphère isolée de 1 centimètre de diamètre électrisée au potentiel 30 serait $0,005 \times 30$

$= 0{,}15$ unités. La densité de l'électricité à la surface serait $\frac{0{,}15}{4\pi\,(0{,}005)^2} = 477$.

Enfin la pression contre l'air atmosphérique ($\psi = 2\pi\delta^2$) serait, par mètre carré, 1.428.880 unités de force ou 145.700 grammes; par centimètre carré, elle serait $14^{gr},57$ (*).

Lorsque le rayon de la sphère diminue la pression augmente; elle serait égale à la pression atmosphérique si le rayon r était tel que $\frac{30}{r} = 50.000$ (n° 84), d'où $r = 0^{mm},6$.

Ainsi avec un rayon de $\frac{6}{10}$ de millimètre, une petite sphère ne pourrait conserver de l'électricité au potentiel 30.

Le rayon minimum de la sphère qui pourrait être électrisée par une pile Daniell de 100 éléments, c'est-à-dire au potentiel 0,0374, est $r = \frac{0{,}0374}{50.000}$ mètres $= 0^{mm},00075$.

On comprend par là comment les pointes métalliques ne laissent pas échapper l'électricité des piles voltaïques tandis qu'elles ne peuvent conserver l'électricité à un haut potentiel des machines électriques.

98. Une batterie électrique formée de vases en verre de 2 millimètres d'épaisseur et dont la surface totale est A a une capacité électrostatique égale à $\frac{A}{4\pi \times 0{,}002} \times 1{,}80$: chargée au potentiel 30, elle contiendrait une quantité

(*) Si la sphère était extensible, comme le serait par exemple une bulle de savon, son diamètre augmenterait jusqu'à ce que l'équilibre s'établisse de nouveau entre la pression intérieure, la pression atmosphérique extérieure diminuée de la pression électrique, et la force moléculaire.

d'électricité égale à $\frac{A \times 30}{4\pi \times 0{,}002} \times 1{,}80$. Si la batterie est formée de 10 jarres ayant chacune $0^m{,}50$ de hauteur et $0^m{,}20$ de diamètre, $A = 10 \times \pi \times 0{,}20 \times 0{,}50$ et la charge est 225 unités.

On vient de voir (n° 95) que le câble transatlantique français, chargé par une pile de 10 éléments Daniell, prend une charge égale à 22.800 unités; pour avoir la même charge avec une batterie électrisée par une machine électrique développant un potentiel 30, il faudrait donner à cette batterie une étendue A telle que $\frac{A \times 30}{4\pi \times 0{,}002} \times 1{,}80 = 22.800$, d'où $A = 10$ mètres carrés. Le câble chargé avec 10 éléments Daniell contient donc autant d'électricité qu'une batterie de 32 vases de $0^m{,}50$ de hauteur et $0^m{,}20$ de diamètre électrisée avec une forte machine de cabinet.

99. *Énergie d'un condensateur.* — L'énergie d'un condensateur est exprimée en unités absolues de travail par $\frac{1}{2} QV$, $\frac{1}{2} \frac{Q^2}{S}$, ou enfin $\frac{1}{2} V^2 S$. S étant sa capacité électrostatique, Q sa charge et V la différence de potentiel des deux armatures.

L'unité absolue de travail est égale à 1 kilogrammètre divisé par 1.000 *g* ou par 9.809, et elle est équivalente à une calorie divisée par 4.168.800 (*). L'énergie d'un condensateur en unités usuelles peut donc être représentée par

$$\frac{1}{2} V^2 S \times \frac{1}{9.809} \text{ kilogrammètres.}$$

(*) En admettant 425 pour l'équivalent mécanique de la chaleur (n°s 27 et 29).

ou

$$\frac{1}{2} V^2 S \times \frac{1}{4168800} \text{ calories.}$$

Une batterie électrique de forme ordinaire a pour capacité $S = \frac{Ac}{4\pi d}$, A étant l'étendue des armatures, d leur distance et c le pouvoir inducteur de la matière qui les sépare.

Si la batterie est composée de n jarres ayant chacune pour hauteur a et pour diamètre b,

$$A = n\pi ab, \quad \text{et} \quad S = \frac{nab \times c}{4d}.$$

L'énergie d'une batterie dont l'armature extérieure serait en communication avec la terre et l'armature intérieure avec une source au potentiel V, est donc

$$V^2 \frac{nab \times c}{8d} \times \frac{1}{9.809} \text{ kilogrammètres}$$

ou

$$V^2 \frac{nab \times c}{8d} \times \frac{1}{4168400} \text{ calories.}$$

Les jarres sont ordinairement en verre de 2 millimètres d'épaisseur et le pouvoir spécifique inducteur $c = 1{,}80$. Quant au potentiel V, développé par la machine électrique, nous admettrons encore le chiffre 30. En substituant ces valeurs, on trouve :

1° Pour l'énergie X de la batterie exprimée en kilogrammètres,

$$X = \frac{nab \times \overline{30}^2 \times 0{,}80}{8 \times 0{,}002 \times 9.809} = nab \times 10{,}322 \text{ kilogrammètres;}$$

2° Pour l'énergie Y exprimée en calories,

$$Y = \frac{nab \times \overline{30}^2 \times 1{,}80}{8 \times 0{,}002 \times 4168800} = nab \times 0{,}0242 \text{ calories.}$$

Avec une petite bouteille de Leyde de $0^m,20$ de hauteur et $0^m,12$ de diamètre, on aurait :

$$X = 0,247 \text{ kilogrammètres},$$
$$Y = 0,00058 \text{ calories}.$$

Avec une grande batterie de 10 jarres de 50 centimètres de hauteur et de 15 centimètres de diamètre :

$$X = 7,74 \text{ kilogrammètres},$$
$$Y = 0^m,0182 \text{ calories}.$$

Ainsi, pour charger complétement la batterie, il faut dépenser un travail équivalent à 7,74 kilogrammètres, c'est-à-dire correspondant à 1 kilogramme élevé à $7^m,74$ de hauteur.

La résistance à vaincre augmente d'ailleurs à mesure que la charge s'accroît, car l'énergie de la batterie, $\frac{1}{2}\frac{Q^2}{S}$, est proportionnelle au carré de la charge, de sorte que pour une demi-charge le travail à développer est $\frac{1}{4}$ de $7^{km},74$, et pour passer de la demi-charge à la charge entière, il est $\frac{3}{4}$ de $7^{km},74$.

100. Quand on décharge la batterie, l'énergie se transforme en force vive, en chaleur ou en travail.

Sur le système nerveux, la décharge de la batterie de 10 jarres doit produire l'effet du choc d'une masse dure, pesant 1 kilogramme, et qui tomberait de plus de 7 mètres de hauteur; on ne doit donc pas s'étonner de son effet foudroyant sur les animaux.

Lorsque la décharge a lieu à travers un fil fin, l'énergie se transforme à peu près complétement en chaleur qui est absorbée par le fil et l'échauffe. Cette quantité de chaleur est égale à 0,0182 calories; elle élèverait de 1°

centigrade $0^k,0182$ d'eau, ou élèverait de 18°,2 la température d'un gramme d'eau.

Supposons le fil conducteur, formé d'un petit fil de fer de 2/10 de millimètre de diamètre et de 1 mètre de longueur, dont le volume est 0,0314 centimètres cubes et le poids $0^{gr},2512$: la chaleur spécifique du fer, ou la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1° centigrade 1 kilogramme de fer, étant $0^{cal},114$, le petit fil de fer sera porté par la décharge instantanée de la batterie à une température de $\frac{18,2}{0,2512 \times 0,114}$ ou de 635°.

Le fer fond à 1.500°; si l'on veut avoir la longueur l du fil qui pourrait être fondu par la décharge de la batterie, on posera : $l \times 1.500 = 635$, d'où l'on tire $l = 0^m,42$.

Ainsi la décharge d'une batterie de 10 jarres électrisées par une bonne machine de cabinet peut fondre complètement un fil de fer de 2 millimètres de diamètre et qui aurait 42 centimètres de longueur.

On a vu plus haut qu'un câble sous-marin tel que le câble transatlantique français, isolé à l'une de ses extrémités et mis en communication avec une faible pile voltaïque, de 10 éléments Daniell, contient une quantité relativement très-grande d'électricité, qui peut être évaluée à 22.800 unités; mais en raison de la faiblesse du potentiel de la source, l'énergie de cette charge est très-faible. En effet, la pile de 10 éléments Daniell ayant pour potentiel 0,00374, l'énergie de la charge en unités absolues est $\frac{0,00374 \times 22.800}{2} = 42,5$, ou en kilogrammètres $0^{km},0043$. Ce serait l'énergie d'une petite bouteille de Leyde électrisée au potentiel 30 par une machine ordinaire et qui aurait pour surface 12 centimètres carrés.

CHAPITRE V

COURANT ÉLECTRIQUE.

Propagation de l'électricité.

101. Le mouvement électrique qui se produit dans un conducteur lorsqu'il réunit deux corps électrisés à des potentiels différents n'a qu'une durée très-courte, et peut même être considéré comme instantané lorsque le conducteur n'a qu'une faible longueur, qu'il est formé d'une substance métallique, et que la charge des deux corps est limitée; mais si les deux corps sont maintenus à des potentiels constants par une source électrique, il s'établit, au bout d'un petit intervalle de temps, un mouvement régulier ou *courant permanent* qui constitue l'état stable et qui persiste tant que les circonstances qui le produisent ne sont pas modifiées.

Dans l'hypothèse des deux fluides, le conducteur est traversé par deux courants de sens opposé, l'un d'électricité positive et l'autre d'électricité négative; dans celle d'un seul fluide, qu'on adopte plus généralement pour l'énoncé des phénomènes d'électricité dynamique, on suppose que le fluide positif se meut seul dans le conducteur; le sens du courant est d'ailleurs toujours défini par la direction du mouvement de ce dernier.

Les courants électriques se manifestent par diverses propriétés: les unes, comme l'échauffement des conducteurs, les décompositions chimiques, l'induction, entraî-

nent une transformation d'énergie; les autres, telles que l'action d'un courant sur un autre courant ou sur un pôle magnétique, peuvent s'observer à l'état statique, c'est-à-dire sans développement de travail, par la simple mesure d'une force.

L'intensité d'un courant dans un conducteur est, par définition, proportionnelle à la quantité d'électricité qui traverse la section de ce conducteur pendant l'unité de temps, ou d'une façon plus générale au rapport $\frac{q}{t}$, q étant la quantité d'électricité qui traverse la section du conducteur pendant un intervalle de temps t, qu'on prend infiniment petit lorsque l'intensité est variable. Quand l'état stable est établi, l'intensité est la même en tous les points d'un même circuit.

On a donc, en nommant i l'intensité du courant, et K une constante :

$$i = \mathrm{K}\frac{q}{t},$$

MM. Faraday et Pouillet ont prouvé par l'expérience que l'intensité d'un courant est proportionnelle à son action sur le pôle d'un aimant ou sur un autre courant constant, ce qui fournit un moyen de la mesurer facilement.

102. *Unité d'intensité.* — Dans le système électrostatique, l'unité de quantité étant fixée, on en déduit l'unité absolue d'intensité en faisant dans la formule précédente $\mathrm{K} = 1$, $q = 1$ et $t = 1$; c'est celle du courant qui serait produit dans un conducteur par l'unité de quantité Q qui traverserait une section de ce conducteur pendant l'unité de temps T (*).

(*) Avec les unités fondamentales ordinaires, le mètre, la seconde et la masse du gramme, cette unité d'intensité est très-faible; ce serait à peu

Cette unité est représentée par la formule :

$$I = \frac{Q}{T}.$$

En remplaçant Q par $\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$ (n° 34), on trouve pour l'expression de l'intensité en fonction des unités fondamentales, ou ses dimensions :

$$I = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}.$$

MM. Weber et Fechner considérant le courant comme dû à un double mouvement, l'un d'électricité positive, l'autre d'électricité négative, ont pris pour unité d'intensité celle du courant produit par l'unité d'électricité positive circulant dans une direction, et l'unité d'électricité négative circulant en sens contraire ; cette unité est double de celle que nous venons de définir et qui est généralement adoptée. L'unité de Weber doit donc être représentée par 2 dans le système ordinaire.

103. *Loi élémentaire d'Ohm.* — Ohm est arrivé aux lois de l'intensité du courant dans les conducteurs linéaires en partant d'un principe fondamental auquel il a été conduit en assimilant la propagation de l'électricité à celle de la chaleur ; ce principe consiste en ce que *le flux électrique*, ou la quantité d'électricité qui passe d'une section à la suivante d'un conducteur dans un intervalle de temps donné est proportionnelle à leur étendue, à la différence de leurs tensions, en raison inverse de leur distance et dépend d'un coefficient constant pour chaque

près celle qu'on obtiendrait avec un seul élément Daniell sur un circuit formé d'un fil de fer de 4 millimètres de diamètre et de 350.000 kilomètres de longueur.

substance et variable d'une substance à l'autre, qui représente son pouvoir conducteur ou sa conductibilité; en désignant par h ce coefficient, par U et U′ les tensions des deux sections voisines, par ω leur étendue et par d leur distance, on a pour l'expression du flux pendant le temps t :

$$h\omega t \frac{U - U'}{d}.$$

M. Kirkchoff a étendu la loi d'Ohm au cas général de la propagation de l'électricité dans un plan et dans l'espace, et l'a rattachée à la théorie de l'électricité statique en remplaçant, dans la formule précédente, les tensions U et U′, dont Ohm avait donné une définition un peu vague qui même ne répond plus à l'état actuel de nos connaissances en électricité, par les potentiels.

V et V′ étant les potentiels des deux points voisins, la quantité d'électricité qui traverse le conducteur entre ces deux points pendant l'intervalle de temps t, est donc :

$$\frac{h\omega t (V - V')}{d};$$

elle est proportionnelle à la force $\frac{V - V'}{d}$ qui agit sur l'unité de quantité d'électricité au point considéré (n° 38).

Il résulte de cette loi élémentaire que, dans le mouvement électrique, la vitesse du fluide à chaque instant dépend uniquement de la grandeur de la force à laquelle il est soumis, et que par conséquent il ne peut acquérir de force vive, ce qui est en opposition avec les principes de la mécanique. On ne doit donc pas admettre cette loi dans toute sa rigueur, mais seulement comme

une limite dont se rapproche assez le phénomène de la propagation pour qu'on puisse en déduire les lois de l'intensité des courants, et qui est la conséquence de la densité infiniment faible du fluide électrique et de la grandeur relative de la résistance que les corps opposent à son mouvement.

Cette conception est justifiée par l'expérience, car le mouvement électrique dans un conducteur cesse aussitôt que le potentiel devient constant; on peut encore citer à l'appui que l'intensité du courant dans un fil ne change pas lorsqu'on replie ce fil sur lui-même.

104. Le fluide électrique, n'ayant pas de vitesse acquise, se meut toujours dans la direction des lignes de force, c'est-à-dire normalement aux surfaces équipotentielles ou de niveau (n° 42). Il est soumis à deux forces égales et de sens contraire : l'une est la résultante des forces dues à l'électricité libre du champ, l'autre est une résistance mécanique produite par le frottement des molécules électriques contre les particules matérielles des corps conducteurs, et l'on peut démontrer que cette résistance doit être proportionnelle à la vitesse de l'électricité.

Supposons, en effet, qu'une quantité d'électricité q traverse la section du conducteur; en un point quelconque, elle est soumise à une force égale à $q \times \frac{V - V'}{d}$ (n° 45), qui doit être égale à la résistance mécanique opposée par le corps conducteur. Si l'on représente par ρ la résistance qu'éprouve l'unité de quantité d'électricité en mouvement dans un conducteur, $q\rho$ sera la résistance opposée à la quantité q; on doit donc avoir :

$$q\rho = q \frac{V - V'}{d},$$

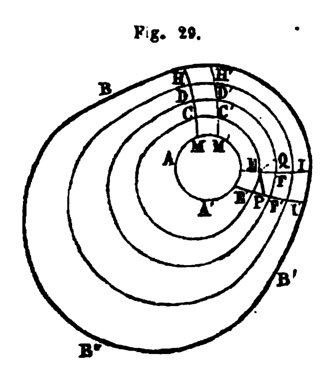
ou

$$\rho = \frac{V - V'}{d}.$$

Or, $\frac{V - V'}{d}$ est, d'après la loi d'Ohm, proportionnel à la quantité qui passe dans l'unité de temps et, par conséquent, à la vitesse de l'électricité.

105. *Propagation de l'électricité dans l'espace.* — Soient deux surfaces AA' et BB'B'' (*fig.* 29), maintenues l'une et l'autre à des potentiels constants et séparées par un milieu conducteur; le fluide se meut de la surface AA' à la surface BB'B'' suivant les lignes de force MCDH, M'C'D'H', EFI, E'F'I', normales aux surfaces de niveau, CC'EE', DD'FF', HH'II', etc., et la quantité d'électricité qui traverse un élément quelconque, tel que CC' = ω pendant un intervalle de temps t, est : $h\omega t \frac{V - V'}{n}$; V et V' étant les potentiels des deux surfaces voisines CC' et DD', n la longueur de la normale CD comprise entre les deux surfaces et h la conductibilité du milieu.

Fig. 29.



On peut démontrer que la même expression représente aussi la quantité d'électricité qui traverse un élément de surface quelconque, EP par exemple, dont la normale EQ forme un angle α avec la ligne de force EF.

Si, en effet, on trace un cylindre ayant pour génératrices les lignes de force qui passent par les divers points du contour de l'élément EP, il découpera sur la surface

de niveau passant par E une petite surface projetée en EE'. L'élément EP est traversé par l'électricité qui passe de EE' à FF', dont la valeur est $h\omega t \frac{V - V'}{n}$, ω étant la surface EE', V et V' les potentiels des surfaces EE' et FF' et n la longueur EF.

Si σ est l'étendue de l'élément EP, et d la longueur EQ de la normale à cet élément comprise entre les surfaces EE' et FF', on a $\frac{\omega}{n} = \frac{\sigma}{d}$, le flux $h\omega t \frac{V - V'}{d}$ qui traverse l'élément EP, peut donc être représenté par

$$h\sigma t \times \frac{V - V'}{d}.$$

C'est cette formule dont on fait usage pour l'étude du phénomène de la propagation dans l'espace ou dans un plan (*).

L'état permanent dans un conducteur ne peut exister qu'à la condition que chaque point conserve toujours le même potentiel, c'est-à-dire que sa situation électrique ne change pas, et, par conséquent, que chaque élément de volume reçoive toujours autant d'électricité d'un côté qu'il en perd de l'autre. Cette condition, combinée avec la loi d'Ohm, conduit, comme dans le cas de l'électricité statique, à cette conclusion qu'il ne peut exister d'électricité libre à l'intérieur d'un conducteur, ainsi que l'expérience l'a prouvé.

Si l'électricité est due à un fluide unique, il doit donc avoir partout la même densité et se comporter comme un fluide incompressible. Toute l'électricité libre réside à la surface de séparation des corps dont la conductibilité est différente.

(*) Cette formule se met sous la forme $h \cdot dt . dS \frac{d(V)}{d(n)}$.

Lois de l'intensité des courants électriques.

106. *Conducteurs linéaires.* — Les conducteurs dont on fait généralement usage ont de faibles dimensions transversales; les surfaces de niveau sont sensiblement perpendiculaires à l'axe, et l'électricité se meut parallèlement à ce dernier.

Soient V et V′ les potentiels des deux points voisins C et D (*fig.* 30) situés à une distance d l'un de l'autre; la quantité d'électricité qui traverse dans un temps t la section ω du conducteur est : $h\omega t\,\frac{V-V'}{d}$; l'intensité du courant, ou la quantité qui passe dans l'unité de temps, est : $h\omega\frac{V-V'}{d}$.

Quand l'état permanent est établi, l'intensité du courant est la même en tous les points du conducteur, le rapport $h\omega\,\frac{V-V'}{d}$ est constant et, si la conductibilité h et la section ω ne changent pas, le rapport $\frac{V-V'}{d}$ doit être invariable.

Si l'on représente les potentiels par des ordonnées perpendiculaires à l'axe du fil, leurs extrémités forment une ligne droite inclinée EF. Les potentiels aux deux extrémités du conducteur sont AE et BF; si V_1 et V_2 désignent leurs valeurs, l la longueur du conducteur, l'intensité du courant est :

$$I = h\omega\,\frac{V_1-V_2}{l}.$$

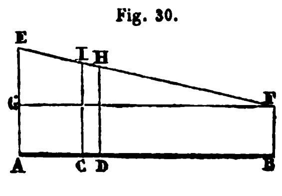
En nommant α l'angle formé par la ligne EF et l'axe AB,

on a :

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{EG}{GF} = \frac{V_1 - V_2}{l} = \omega h I.$$

107. *Charge des conducteurs.* — Puisqu'il n'existe pas d'électricité libre à l'intérieur des corps traversés par un courant permanent, le potentiel aux divers points, c'est-à-dire la somme $\sum \frac{q}{r}$, pour un long conducteur ne peut être dû qu'au fluide libre qui réside sur la surface externe ; cette surface doit donc prendre une charge telle que le potentiel décroisse d'une manière continue le long du conducteur. Pour chaque élément de la surface la densité est proportionnelle au potentiel de l'élément, et dépend, en outre, de la forme de la section et de l'influence des corps situés dans le voisinage, c'est-à-dire de la capacité électrostatique (n° 53).

Fig. 30.



La densité de l'électricité peut donc varier d'une manière très-irrégulière le long d'un conducteur ; mais si, dans toute son étendue, il se trouve placé de la même manière par rapport aux corps environnants, la capacité électrostatique est constante et la densité en chaque point est proportionnelle au potentiel. Elle décroît régulièrement d'une extrémité à l'autre du conducteur, ce qu'on a vérifié directement par des expériences électroscopiques.

La couche d'électricité libre qui réside à la surface d'un conducteur ne peut être en équilibre, puisque son potentiel n'est pas constant ; elle prend part au mouvement général, mais sa masse étant très-petite par rapport à celle du courant intérieur, est négligeable.

108. *Force électromotrice.* — On nomme force électro-

motrice, la force particulière, quelle que soit d'ailleurs son origine, qui produit ou tend à produire une différence de potentiel entre deux points (*) ; elle a pour mesure cette différence de potentiel.

Ainsi, dans le cas de la *fig.* 30, la force électromotrice qui agit sur le conducteur AB, et donne lieu au courant, est la différence des potentiels de ces deux points; en la nommant E, on a :

$$E = V_1 - V_2.$$

La force électromotrice pouvant être représentée par une différence de potentiels, ses dimensions sont les mêmes que celles de cette grandeur (n° 48) :

$$E = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

109. *Résistance électrique.* — L'intensité du courant produit par une force électromotrice E à travers un conducteur de longueur l et de section ω, est :

$$I = h\omega \frac{E}{l}$$

ou

$$I = \frac{E}{\frac{l}{h\omega}},$$

h étant un coefficient particulier pour chaque substance, qui représente son pouvoir conducteur.

Si l'on pose :

$$\frac{l}{h\omega} = R, \quad I = \frac{E}{R}.$$

La grandeur R est la résistance électrique; c'est une

(*) On verra plus loin que les forces électromotrices ne donnent pas toujours lieu à une différence de potentiel (n° 115).

propriété des conducteurs qui a pour effet de faire varier l'intensité du courant produit par une force électromotrice donnée, et qui est essentiellement distincte de la résistance mécanique opposée par la matière au passage du fluide, et dont il a été question précédemment (n° 104).

La résistance d'un conducteur est proportionnelle à sa longueur, et en raison inverse de sa section et de son pouvoir conducteur.

Deux conducteurs peuvent être substitués l'un à l'autre, et produisent le même courant, si pour ces deux conducteurs on a :

$$\frac{l}{h\omega} = \frac{l'}{h'\omega'}.$$

Cette formule permet de comparer les pouvoirs conducteurs h et h', puisqu'alors

$$\frac{h}{h'} = \frac{l\omega'}{l'\omega}.$$

L'unité absolue de force électromotrice étant déterminée, ainsi que l'unité absolue d'intensité, on en déduit l'unité absolue de résistance; c'est celle d'un conducteur qui, sous l'action d'une force électromotrice égale à l'unité, serait parcourue par un courant qui aurait une intensité égale à l'unité (*).

Les dimensions de l'unité de résistance se déduisent de l'équation $I = \frac{E}{R}$ ou $R = \frac{E}{I}$, en remplaçant E par

(*) L'unité électrostatique absolue de résistance serait à peu près celle d'un fil de fer de 4 millimètres de diamètre qui aurait 100 millions de kilomètres de longueur.

$\frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$ et I par $\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$, on trouve :

$$R = \frac{T}{L}.$$

La résistance est donc exprimée par le rapport d'un temps à une longueur, ou par l'inverse d'une vitesse.

110. *Résistance spécifique absolue.* — La résistance spécifique d'une substance est la résistance électrique de cette substance rapportée à l'unité de longueur et de volume : c'est celle qu'offrirait un conducteur cylindrique formé de cette substance, qui aurait une longueur égale à l'unité et dont la section serait égale à l'unité de surface. En adoptant le mètre pour unité de longueur, ce serait celle d'un mètre cube de la substance, dont deux faces opposées seraient maintenues à des potentiels constants.

En nommant R_s la résistance spécifique d'une matière, un conducteur de section ω et de longueur l formé de cette matière a pour résistance absolue $R = R_s \frac{l}{\omega}$; la surface ω peut elle-même être remplacée par le carré d'une longueur l'^2, et, par suite

$$R = R_s \frac{l}{l'^2}.$$

Si l et l' sont égaux à l'unité de longueur L, $R = \frac{R_s}{L}$ ou $R_s = LR$, et comme les dimensions de R sont $R = \frac{T}{L}$, on trouve pour celles de R_s

$$R_s = T.$$

La résistance spécifique des diverses matières rapportées à l'unité de volume peut donc être représentée par un intervalle de temps, c'est-à-dire par un certain

nombre de secondes; elle est indépendante des unités de longueur et de masse, et varie seulement avec l'unité de temps.

On rapporte aussi quelquefois la résistance spécifique à l'unité de masse : c'est alors la résistance qu'offrirait un conducteur cylindrique formé d'une substance donnée qui aurait une longueur égale à l'unité, et dont la masse serait égale à l'unité de masse, c'est-à-dire pèserait un gramme.

Pour une matière quelconque, la résistance spécifique rapportée à l'unité de masse est évidemment égale à la résistance rapportée à l'unité de volume divisée par la densité de la matière, c'est-à-dire par le poids de l'unité de volume.

111. *Conductibilité électrique.* — La conductibilité d'un conducteur est l'inverse de sa résistance ou $\frac{1}{R}$.

Les dimensions de la conductibilité, H, sont :

$$H = \frac{1}{R} \quad \text{ou} \quad H = \frac{L}{T};$$

elle est donc représentée par une vitesse. On peut s'en rendre compte de la manière suivante :

Imaginons une sphère électrisée en communication avec la terre par un fil conducteur de résistance R, ou de conductibilité $H = \frac{1}{R}$: à mesure que le fluide s'écoule par le conducteur la charge décroît, mais on peut concevoir que le rayon de la sphère diminue peu à peu, de façon que son potentiel reste constant ainsi que l'intensité du courant.

Si, à un instant donné, Q est la charge de la sphère, V son potentiel et r son rayon, on a $Q = Vr$ (n° 54) ; au bout d'un petit intervalle de temps θ la charge devient

Q′, le rayon r' et, le potentiel restant constant, on doit avoir $Q' = Vr'$.

La quantité d'électricité qui, pendant l'intervalle θ, a passé dans le fil est $Q - Q' = V(r - r')$ et l'intensité du courant I est :

$$I = \frac{Q - Q'}{\theta} = \frac{V(r - r')}{\theta},$$

et comme $I = \frac{V}{R} = VH$, on en déduit :

$$H = \frac{r - r'}{\theta}.$$

La vitesse avec laquelle doit décroître le rayon de la sphère représente donc en valeur absolue la conductibilité du conducteur ou l'inverse de sa résistance.

Un fil de cuivre de 1 millimètre de section et de 1.000 kilomètres de longueur a une conductibilité d'environ 504.300 $\frac{\text{mètres}}{\text{secondes}}$, ou une résistance de 0,000.001.98 secondes par mètre; la conductibilité d'un fil de soie d'un mètre de longueur est dans l'air sec de 25 millimètres, et dans l'air humide de $0^m,90$ par seconde (*).

112. *Conductibilité spécifique absolue.* — La conductibilité spécifique absolue d'une substance est la conductibilité de cette substance rapportée à l'unité de longueur et de volume, c'est l'inverse de la résistance spécifique absolue ; elle a pour dimensions :

$$H_s = \frac{1}{T}.$$

Lorsque la conductibilité spécifique absolue d'une sub-

(*) Mémoire de MM. Maxwell et Jenkin, annexé au rapport d'août 1863 de la Commission de l'étalon de résistance.

stance $H_{\prime}$ est connue, on en déduit la conductibilité H d'un conducteur quelconque formé de cette substance dont la longueur serait l et la section ω; en posant $H = H_{\prime}\frac{\omega}{l}$, sa résistance absolue est $R = \frac{l}{H_{\prime}\omega}$.

On rapporte quelquefois la conductibilité spécifique comme la résistance à l'unité de longueur et à l'unité de masse.

La plupart des tableaux qu'on trouve dans les traités de physique ne donnent pas la conductibilité spécifique absolue, mais le pouvoir conducteur rapporté à celui d'un métal choisi arbitrairement, tels que l'argent, le cuivre, le mercure, etc. On passe facilement du pouvoir conducteur relatif à la conductibilité spécifique absolue quand on connaît celle d'un quelconque des métaux de la série.

113. *Lois de l'intensité du courant.* — Le cas d'un conducteur limité à deux points qui sont maintenus à des potentiels constants est plutôt théorique que pratique.

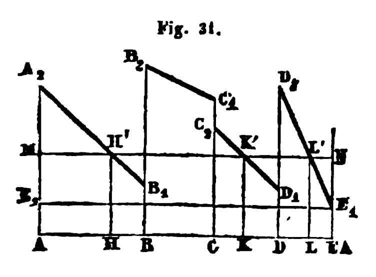
Pour obtenir des courants d'une certaine durée, il faut faire intervenir une ou plusieurs sources électriques sur un circuit fermé soit directement, soit par l'intermédiaire de la terre, qui se comporte comme un corps conducteur ordinaire dont la résistance est très-faible en raison de sa grande section.

Les sources électriques sont de natures diverses ; celles dont on fait le plus habituellement usage sont celles qui se manifestent au contact de deux substances hétérogènes et produisent une différence de potentiel qui dépend de la nature des deux corps en contact et est indépendante de l'intensité du courant. Cette différence de potentiel représente la force électromotrice de la source électrique.

Pour établir les lois du courant (*), il suffit d'indiquer que dans tous les conducteurs qui composent le circuit l'intensité, c'est-à-dire la quantité d'électricité qui traverse la section, est la même, et qu'aux divers points où existe une source électrique, il se produit une différence de potentiel égale à la force électromotrice de la source.

Soient AB, BC, CD, DE (*fig.* 31), les divers conducteurs qui forment un circuit complet, étendu suivant une ligne droite, les extrémités E et A correspondant au même point; r, r', r'', r''', les résistances des conducteurs AB, BC, etc.; e, e' e'', e''', les forces électromotrices qui agissent aux points (AE), B, C et D, la force électromotrice au point C agissant en sens contraire des autres.

Fig. 31.



Les potentiels aux divers points du circuit peuvent être représentés par des ordonnées dont les extrémités forment une série de lignes droites inclinées, A_2B_1, B_2C_1, C_2D_1, D_2E_1.

Pour le conducteur AB, l'intensité du courant I est :

$$I = \frac{AA_2 - BB_1}{r};$$

d'où l'on tire :

$$Ir = AA_2 - BB_1,$$

pour le conducteur BC :

$$Ir' = BB_2 - CC_1;$$

(*) Nous croyons devoir rappeler brièvement la théorie d'Ohm, bien qu'elle se trouve dans la plupart des traités d'électricité.

pour CD :

$$Ir'' = CC_2 - DD_1;$$

pour DE :

$$Ir''' = DD_2 - EE_1.$$

En faisant la somme, on a :

$$I(r + r' + r'' + r''') = (AA_2 - EE_1) + (BB_2 - BB_1) + (CC_2 - CC_1) + (DD_2 - DD_1).$$

Les différences de potentiel $AA_2 - EE_1$, $BB_2 - BB_1$, etc. sont les forces électromotrices e, e', e'', etc.

On a donc :

$$I = \frac{e + e' - e'' + e'''}{r + r' + r'' + r'''},$$

ou plus généralement :

$$I = \frac{E}{R},$$

R étant la somme des résistances de tous les conducteurs et E la somme algébrique des forces électromotrices en considérant comme positives celles qui produisent une augmentation de potentiel dans la direction du courant, et comme négatives celles qui produisent une diminution, comme e''.

Les lignes A_2B_1, B_2C_1 etc. sont inégalement inclinées ; la tangente de l'angle α formé par chacune d'elles avec l'axe AE est, ainsi qu'on l'a vu au n° 106 :

$$\operatorname{tg} \alpha = I \times h\omega,$$

ω et h étant la section et la conductibilité spécifique du conducteur correspondant.

La grandeur absolue de la tension dépend de celle d'un quelconque des points du circuit. Si, par exemple, le point H est en communication avec la terre, son potentiel est nul et la ligne MH'N représentera l'axe à partir duquel

devront être comptés les potentiels, qui seront tantôt positifs et tantôt négatifs.

Lorsque le circuit est isolé, la position de l'axe se détermine par la condition que l'électricité positive et l'électricité négative, qui se trouvent à l'état libre à la surface des conducteurs, soient en quantités égales; pour avoir la position de l'axe, il faut donc connaître la capacité électrostatique des diverses parties du circuit.

Quand on réunit au moyen d'un fil conducteur additionnel les points qui ont un même potentiel, ce fil prend une certaine charge correspondante à ce potentiel, mais il n'est traversé par aucun courant et sa présence ne modifie en rien l'intensité du courant qui passe dans le conducteur principal.

Supposons que les conducteurs AB, BC, CD et DE, au lieu de former un circuit fermé directement, fassent partie d'un circuit comprenant d'autres conducteurs et traversés par un courant d'intensité I.

Soient $V = AA_2$ et $V' = EE_1$ les potentiels aux deux extrémités A et E, on a :

$$IR = V - V' + e' - e'' + e'''$$

ou

$$IR = V - V' + E_1$$

et

$$V - V' = E_1 - IR.$$

R étant la somme des résistances des conducteurs et E_1 la somme des forces électromotrices comprises entre A et E.

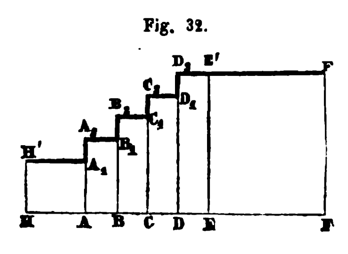
Cette équation permet de calculer la différence des potentiels de deux points d'un circuit quand on connait l'intensité du courant qui le traverse, la résistance des conducteurs et les forces électromotrices situées entre ces deux points. Si $V = V'$, on a : $E_1 = IR$.

Deux points d'un même conducteur peuvent donc avoir le même potentiel bien que le conducteur soit parcouru par un courant, pourvu qu'entre ces points il existe une force électromotrice telle que $IR = E$.

114. En appliquant ces principes aux courants produits par les piles voltaïques ordinaires, on se rend aisément compte de la variation du potentiel le long du circuit dans les divers cas qui peuvent se présenter.

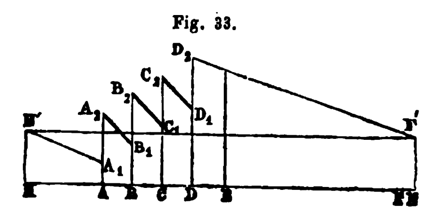
En premier lieu, si le circuit est ouvert, il ne se produit pas de courant, le potentiel est constant dans toute l'étendue de chacun des conducteurs et augmente d'une quantité constante à chaque surface de séparation où se manifeste une force électromotrice. AB, BC, CD et DE (*fig.* 32) représentant les conducteurs qui forment les éléments de la pile, A, B, C, D, les surfaces de contact siéges des forces électromotrices, EF et AH les conducteurs extérieurs à la pile, le potentiel est donné par la série des lignes horizontales $H'A_1$, A_2B_1. B_2C_1, etc. La différence des potentiels aux deux pôles de la pile, A et E, est égale à la somme des forces électromotrices A_1 A_2, B_1 B_2, etc. des éléments dont elle se compose.

Fig. 32.



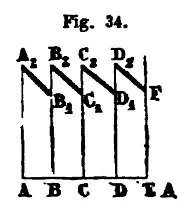
Si le circuit de la pile est fermé par un conducteur AHFE (*fig.* 33), les potentiels sont représentés par une

Fig. 33.



série de lignes parallèles $A_2 B_1, B_2 C_1$, etc. (*); pour chaque élément et par une ligne moins inclinée $D_2F'H'A_1$ pour le conducteur interpolaire dont la résistance comprend celle du dernier élément et celle du conducteur extérieur.

Fig. 34.



Enfin, si les deux pôles A et E (*fig.* 34) sont réunis directement, on a pour la représentation du potentiel une série de lignes parallèles inclinées A_2B_1, B_2C_1 etc. placées toutes à la même hauteur par rapport à l'axe AE, et l'intensité du courant est indépendante du nombre des éléments.

Quant à la position de l'axe à partir duquel doivent se compter les potentiels, elle se détermine soit par la position d'un point du circuit dont on connaît le potentiel, soit par la condition que les quantités d'électricité positive et d'électricité négative qui sont libres soient en quantités égales.

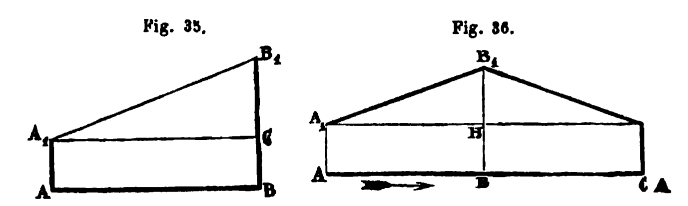
115. *Courants d'induction.* — Dans certains cas la force électromotrice n'a qu'une valeur infiniment faible, mais s'exerce d'une manière continue sur une longueur déterminée d'un même conducteur. C'est ce qui a lieu pour les courants d'induction qui se développent dans un circuit lorsqu'on en rapproche ou qu'on en éloigne un autre circuit traversé par un courant ou encore dans un fil enroulé autour d'un cylindre de fer doux dont on fait varier l'aimantation.

La force électromotrice développée varie avec la vitesse du mouvement qui éloigne ou rapproche le circuit induit du courant fixe ou de l'aimant, et l'on peut faire

(*) On suppose que les corps qui forment les éléments ont la même conductibilité.

varier ce mouvement de façon qu'elle soit constante pendant un certain temps.

Les lois sont les mêmes que pour les courants voltaïques. Si AB (*fig.* 35) est le fil soumis à l'induction, et si le circuit est ouvert, le potentiel augmente de A à B, et la différence des potentiels $BB_1 - AA_1 = CB_1$ représente la force électromotrice totale due à l'induction, E.



Si le circuit est fermé par un fil BC (*fig.* 36) non soumis à l'induction, on a un courant dans la direction ABCA, et l'intensité du courant est $I = \frac{E}{R + R'}$. R étant la résistance AB et R' la résistance BC, les potentiels sont donnés par deux lignes inclinées en sens contraire.

La différence $V_a - V_b$ des potentiels en A et B est toujours moindre que E et est d'autant moindre que la résistance R' du fil BC est moins considérable. En effet, on a entre ces deux points :

$$V_b - V_a = IR' = E \times \frac{R'}{R + R'}.$$

Si enfin le circuit du fil AB est fermé sans conducteur intermédiaire, le potentiel est le même en tous les points du circuit.

On peut donc concevoir des courants électriques produits sans développement de potentiel et par conséquent d'électricité libre. C'est ainsi que doivent être envisagés les courants qui, d'après l'hypothèse d'Ampère, produisent

le magnétisme terrestre. La force électromotrice, bien qu'elle soit mesurée et puisse être produite par une différence de potentiel, a donc une signification plus générale.

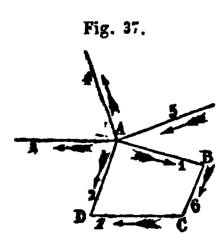
On retrouve un phénomène analogue dans le mouvement de l'eau. Si un tuyau horizontal réunit deux réservoirs pleins d'eau à des niveaux différents, il se produit un écoulement ; mais le mouvement peut avoir lieu, même lorsque les deux niveaux sont les mêmes, si l'on met en jeu dans le tuyau une machine hydraulique telle qu'hélice, pompe, etc.

116. *Lois des courants dans les circuits complexes.* — L'étude de la propagation de l'électricité dans les circuits complexes, c'est-à-dire la détermination de l'intensité du courant dans les divers conducteurs, ne présente aucune difficulté quand on connaît leurs résistances et la position des forces électromotrices.

En premier lieu on indique qu'à chaque sommet du circuit, c'est-à-dire à chaque point où se rencontrent plusieurs conducteurs, il arrive autant d'électricité par un ou plusieurs d'entre eux qu'il s'en écoule par les autres.

Dans ce but, on suppose aux courants qui circulent dans les conducteurs un sens déterminé, et l'on exprime que la somme des intensités des courants qui aboutissent à un sommet est nulle, en affectant d'un même signe les courants qui se dirigent vers un sommet et d'un signe contraire les courants qui s'en éloignent. Pour le sommet A, par exemple (*fig.* 37), auquel arrivent 5 conducteurs parcourus par des courants dont les flèches représentent le sens supposé, on aura :

Fig. 37.



$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 - I_5 = 0.$$

En outre, pour chaque conducteur aboutissant à deux sommets A et B, si V_a et V_b représentent les potentiels de ces points, E_1 la somme des forces électromotrices qui se trouvent sur le parcours du conducteur AB, et R_1 sa résistance, on a :

$$V_a - V_b = I_1R_1 - E_1.$$

En considérant un polygone ABCD, formé des fils 1, 2, 6 et 7, on a de même :

$$V_b - V_c = I_6R_6 - E_6,$$
$$V_c - V_d = I_7R_7 - E_7,$$
$$V_d - V_a = -I_2R_2 - E_2,$$

ou en faisant la somme de ces quatre équations, il vient :

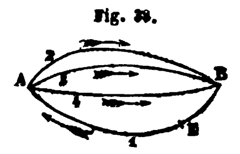
$$I_1R_1 + I_6R_6 + I_7R_7 - I_2R_2 = E_1 + E_6 + E_7 + E_2,$$

c'est-à-dire que la somme des produits qu'on obtient en multipliant l'intensité dans chaque conducteur par sa résistance est égale à la somme des forces électromotrices, en considérant les intensités comme positives ou négatives suivant que les courants ont la même direction ou des directions contraires.

En appliquant les deux formules précédentes aux divers sommets d'un circuit et aux polygones qu'on peut former avec les conducteurs, on obtient autant d'équations qu'il est nécessaire pour déterminer l'intensité en tous ses points, et le signe trouvé fait connaître si le courant marche dans la direction supposée ou en sens contraire.

Soit par exemple (*fig.* 38) le cas des courants dérivés ordinaires, où plusieurs conducteurs 2, 3, 4 réunissent deux points A et B d'un conducteur AB, sur le parcours duquel se trouve une force électromotrice E, on a les équa-

Fig. 38.



tions :

$$I_1 = I_2 + I_3 + I_4,$$
$$I_1R_1 + I_2R_2 = E,$$
$$I_2R_2 = I_3R_3 = I_4R_4 ;$$

de ces équations on déduit les valeurs de I_1, I_2, I_3 et I_4 :

$$I_1 = \frac{E}{R_1 + \dfrac{1}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}},$$

$$I_2 = I_1 \times \frac{\dfrac{1}{R_2}}{\dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \dfrac{1}{R_4}}.$$

Soit encore le cas ou deux dérivations ACB et ADB (*fig.* 39) sont reliées par un conducteur 6, une seule force électromotrice E, se trouvant dans le circuit sur le parcours du fil 1. En supposant que le courant ait la direction BEA, ADB et ACB, et qu'il parte du point C dans le conducteur 6, les intensités aux divers points du circuit se calculent par les équations :

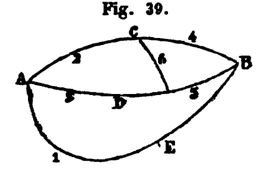


Fig. 39.

$$I_1 = I_2 + I_3,$$
$$I_2 = I_4 + I_6$$
$$I_5 = I_3 + I_6$$
$$I_2R_2 + I_6R_6 - I_3R_3 = 0,$$
$$I_6R_6 + I_5R_5 - I_4R_4 = 0,$$
$$I_1R_1 + I_3R_3 + I_5R_5 = E.$$

Pour que le fil 6 ne soit parcouru par aucun courant, la valeur de I_6 doit être égale à 0; en indiquant cette condition dans les équations, on arrive à la formule bien connue du pont de Wheastone :

$$\frac{R_2}{R_3} = \frac{R_4}{R_5}.$$

117. ***Propagation dans un milieu conducteur.*** — La propagation de l'électricité est moins simple dans un milieu conducteur qui n'est pas réduit à de faibles dimensions transversales, tel que l'espace compris entre les deux surfaces AA′ et BB′B″ (*fig.* 29).

Ces deux surfaces étant maintenues à des potentiels constants, le fluide se meut de l'une à l'autre surface dans la direction des lignes de force MCDH, M′C′D′H′, etc.

La quantité d'électricité qui traverse dans l'unité de temps un petit élément $\omega = DD'$ d'une surface de niveau, est, en nommant h la conductibilité du milieu, V et V′ les potentiels des deux surfaces de niveau très-voisines DD′ et HH′, et n leur distance DH :

$$\omega h \frac{V - V'}{n}.$$

La distance n n'étant pas constante en général entre deux surfaces de niveau, cette quantité est variable pour les divers éléments.

On peut nommer *intensité spécifique* le rapport de la quantité d'électricité qui traverse pendant l'unité de temps un élément d'une surface de niveau à l'étendue de cet élément, ou l'intensité rapportée à l'unité de surface; cette intensité spécifique est en chaque point proportionnelle à la vitesse de l'électricité.

M. Edlund a proposé d'attribuer d'une manière générale le mot *intensité* à la quantité d'électricité qui traverse normalement l'unité de surface dans un conducteur quelconque; la quantité totale d'électricité qui passe par un conducteur linéaire serait alors égale au produit de l'intensité par la section. L'action des courants étant proportionnelle à ce produit, il est préférable de le prendre

pour représenter l'intensité, en conservant à ce mot la signification ordinaire.

118. — L'intensité totale du courant est la quantité d'électricité qui traverse dans l'unité de temps une surface de niveau.

Pour avoir cette quantité, I, il faut faire la somme des valeurs $\omega h \frac{V - V'}{n}$ pour toute l'étendue d'une surface quelconque de niveau, ou pour toute l'étendue de la surface AA' (*fig.* 29) par laquelle pénètre le courant, qui est elle-même une surface de niveau. On peut donc poser :

$$I = \sum \omega h \frac{V - V'}{n}$$

ou

$$I = h(V - V') \sum \frac{\omega}{n},$$

h, V et V' étant constants.

Si l'on remplace le milieu compris entre les deux surfaces, dont le potentiel est maintenu constant, par un fil conducteur, la résistance que ce fil devrait avoir pour être parcouru par un courant dont l'intensité serait égale à l'intensité totale du courant qui traverse le milieu représente la résistance de ce dernier.

V et V_1 étant les potentiels constants des deux surfaces, on doit avoir :

$$I = \frac{V - V_1}{R}$$

ou

$$R = \frac{V - V_1}{I},$$

et en substituant la valeur de I trouvée précédemment :

$$R = \frac{V - V_1}{V - V'} \times \frac{1}{h \sum \frac{\omega}{n}}.$$

On peut aussi calculer la résistance en imaginant une série de surfaces de niveau très-rapprochées les unes des autres et en cherchant la résistance de l'espace entre ces diverses surfaces.

Entre deux surfaces de niveau très-voisines, dont les potentiels sont V et V', la résistance est $R = \frac{1}{h\sum\frac{\omega}{c}}$ (*); la somme des résistances ainsi obtenues pour toute l'étendue du milieu donne sa résistance.

119. — La recherche de la résistance d'un milieu, qui est subordonnée à celle des surfaces de niveau, ne peut être résolue que dans quelques cas particuliers, tels que celui d'un milieu homogène compris entre deux sphères concentriques ou entre deux cylindres concentriques ou excentriques.

Ainsi soient a et b les rayons de deux sphères concentriques et k la conductibilité du milieu compris entre elles; les surfaces de niveau sont évidemment des sphères comprises entre les deux sphères extrêmes, et la résistance de l'espace compris entre deux surfaces de niveau voisines, dont les rayons sont r et $r + \alpha$, est

$$\frac{\alpha}{4\pi h r^2}.$$

En faisant varier r depuis a jusqu'à b et faisant la somme des résistances partielles, on trouve aisément

(*) En effet, dans l'équation précédente, V représente le potentiel de la surface intérieure AA' (*fig.* 29), V_1 celui de la surface extérieure BB', et V' celui d'une surface de niveau telle que CC'EE' très-voisine de AA'. Si l'on n'envisage que l'espace compris entre les deux surfaces A' et CC'EE', V_1 peut être remplacé par V' et par suite $R = \frac{1}{h\sum\frac{\omega}{e}}$.

pour la résistance totale (*) :

$$R = \frac{1}{4\pi h}\frac{b-a}{ab}.$$

Considérons encore le cas de deux cylindres concentriques assez longs pour être considérés comme indéfinis. Les surfaces équipotentielles sont des cylindres concentriques, et pour une hauteur l la résistance de l'espace compris entre deux cylindres concentriques très-rapprochés, dont les rayons sont r et $r+\alpha$, est $\frac{\alpha}{2\pi h r l}$; entre les deux cylindres extrêmes, la résistance sera égale à la somme des termes qu'on obtient en faisant varier r de a et b, ce qui donne (**) :

$$R = \frac{1}{2\pi h l}\log \text{nép.} \frac{b}{a}.$$

Cette formule donne en valeur absolue la résistance si h représente la valeur absolue de la conductibilité spécifique.

C'est la résistance qu'oppose au courant l'enveloppe isolante des câbles sous-marins.

120. *Constance du produit de la résistance par la capacité électrostatique.* — Nous avons trouvé : 1° pour la capacité électrostatique de deux sphères concentriques

(*) En remplaçant α par dr, on a :

$$R = \int_a^b \frac{dr}{4\pi h r^2} = \frac{1}{4\pi h}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) = \frac{1}{4\pi h}\frac{b-a}{ab}.$$

(**) On a en effet, en remplaçant α par dr :

$$R = \int_a^b \frac{dr}{2\pi h r l} = \left(\frac{1}{2\pi h l}\log. \text{nép.}\, r\right)_a^b = \frac{1}{2\pi h l}\log. \text{nép.} \frac{b}{a}.$$

dont les rayons sont a et b (n° 55) (*) :

$$S = \frac{ab}{b-a},$$

et en multipliant par le pouvoir inducteur spécifique c de la matière qui sépare les deux sphères,

$$S = \frac{ab \times c}{b-a};$$

2° pour la capacité électrostatique d'un condensateur de longueur l formé de deux cylindres concentriques

$$S = \frac{l}{2 \log \text{nép.} \frac{b}{a}},$$

ou en tenant compte du pouvoir inducteur,

$$S = \frac{l \times c}{2 \log \text{nép.} \frac{b}{a}}.$$

En faisant le produit de la résistance R par la capacité électrostatique, on trouve dans les deux cas :

$$RS = \frac{c}{4\pi h};$$

le produit RS de la résistance par la capacité électrostatique est donc constant.

On peut démontrer la généralité de cette loi.

En adoptant les notations précédentes on a, en effet, pour l'expression de la résistance d'un milieu compris entre deux surfaces,

$$R = \frac{V - V_1}{V - V'} \times \frac{1}{h \sum \frac{\omega}{n}}.$$

(*) La formule du n° 55 est $\frac{Rr}{R-r}$; dans laquelle R représente le rayon de la sphère extérieure b, et r celui de la sphère intérieure a.

D'un autre côté, si l'on regarde les deux surfaces comme formant un condensateur à air, et si l'on représente par Q la charge de la surface intérieure, on a pour la capacité électrostatique S (n° 81) :

$$S = \frac{Q}{V - V_1}.$$

La charge totale Q est égale à la somme $\Sigma\omega\delta$ des produits des divers éléments ω de la surface par la densité δ en chaque point.

On a vu, n° 83, que la résultante des forces électriques qui s'exercent sur l'unité de quantité à la surface d'un corps, dont le potentiel est V, a pour valeur $\varphi = \frac{V - V'}{n}$, en nommant V' le potentiel d'une surface de niveau très-voisine, et n la longueur de la normale comprise entre les deux surfaces, et qu'elle peut aussi être exprimée en fonction de la densité électrique par l'expression $4\pi\delta$, on a donc :

$$\frac{V - V'}{n} = 4\pi\delta$$

ou

$$\delta = \frac{V - V'}{n} \times \frac{1}{4\pi};$$

d'où

$$Q = \frac{V - V'}{4\pi} \sum \frac{\omega}{n},$$

et par suite

$$S = \frac{V - V'}{4\pi(V - V_1)} \sum \frac{\omega}{n}.$$

Si le milieu qui sépare les surfaces extérieures considérées comme formant un condensateur, au lieu d'être de l'air est une substance dont le pouvoir spécifique inducteur soit égal à c, sa capacité est :

$$S = \frac{(V - V')\,c}{4\pi(V - V_1)} \sum \frac{\omega}{n};$$

en multipliant l'une par l'autre les valeurs de R et de S, on a :

$$RS = \frac{c}{4\pi h},$$

ou, si l'on remplace la conductibilité spécifique h par la résistance spécifique $\rho = \frac{1}{h}$,

$$RS = \frac{\rho c}{4\pi}.$$

Lorsqu'on connaît les coefficients c et h, pour un milieu déterminé, on peut déduire la résistance qu'offrirait un milieu formé de cette substance de sa capacité électrostatique, ou réciproquement.

Si c et ρ sont constants, et si l'on fait varier seulement la forme du milieu, le produit de la capacité électrostatique par la résistance reste constant.

C'est ce qui a lieu, par exemple, pour les câbles sous-marins, dont le milieu isolant est ordinairement de la gutta-percha. Quelles que soient les dimensions adoptées pour le conducteur et l'épaisseur de la gutta-percha, le produit de la capacité électrostatique de l'enveloppe par sa résistance est une constante qui dépend uniquement de la qualité de la matière isolante, et qui est la même pour la plupart des câbles construits dans ces dernières années avec la gutta-percha perfectionnée.

Mesure en unités électrostatiques de l'intensité et de la résistance.

121. *Mesure de l'intensité.* — La mesure de l'intensité des courants s'effectue au moyen du galvanomètre, de l'électro-dynamomètre ou du voltamètre. Les résultats

sont exprimés en unités d'une autre nature que les unités électrostatiques; pour être transformés en unités de cette dernière espèce, ils doivent être multipliés par un coefficient qui dépend de la forme de l'appareil employé, et qu'on doit déterminer par l'expérience.

Lorsqu'on met l'un des pôles d'une forte pile électrique en communication avec l'une des armatures d'un condensateur dont l'autre armature est reliée à la terre en même temps que le second pôle de la pile, on obtient une charge qu'on peut évaluer en unités électrostatiques absolues quand on connaît le potentiel ou la force électromotrice de la pile et la capacité électrostatique du condensateur. Si, après avoir chargé ce dernier, on le met en communication avec le sol par un fil conducteur, il se décharge en donnant lieu dans le fil à un courant à peu près instantané. En répétant l'opération un grand nombre de fois, à des intervalles très-rapprochés, ce qu'on peut réaliser au moyen d'une roue interruptrice, on produit dans le fil un courant à peu près continu, dont l'intensité en unités électrostatiques est égale au produit de la charge par le nombre de décharges effectuées pendant une seconde. En faisant traverser à ce courant le fil d'un galvanomètre, on obtient une déviation de l'aiguille qui correspond à cette intensité, ce qui permet d'en déduire, si le galvanomètre est gradué, l'intensité correspondant à une déviation quelconque.

122. *Mesure de la résistance.* — La mesure de la résistance d'un conducteur en unités électrostatiques peut s'effectuer directement lorsque ce conducteur est formé d'une substance dont la résistance spécifique est très-grande, ainsi que cela a lieu pour le caoutchouc, la gutta-percha, la soie, etc. Pour obtenir cette résistance, on met l'une des extrémités du conducteur en communication

avec un corps métallique électrisé et l'autre avec la terre, puis on observe au moyen d'un électromètre la vitesse avec laquelle s'opère la décharge.

Soit Q la charge du corps conducteur électrisé, S sa capacité électrostatique et V le potentiel de la charge, on a :

$$Q = VS.$$

Si le corps communique avec la terre par le conducteur, la charge s'écoule peu à peu, et au bout d'un petit intervalle de temps θ elle devient Q' ; en désignant le nouveau potentiel par V', on a :

$$Q' = V'S.$$

La quantité d'électricité qui a traversé le conducteur dans l'intervalle de temps θ est :

$$Q - Q' = (V - V')S.$$

L'intensité de courant I dans le conducteur pendant cet intervalle de temps est :

$$I = \frac{Q - Q'}{\theta} = \left(\frac{V - V'}{\theta}\right)S.$$

D'après la loi d'Ohm, on a :

$$I = \frac{V}{R},$$

donc

$$\frac{V}{R} = \frac{(V - V')}{\theta} S,$$

d'où l'on tire :

$$\theta = \frac{V - V'}{V} \times RS.$$

Pendant un second intervalle de temps θ', le potentie

diminue encore et passe de la valeur V' à une autre valeur V'', et l'on a :

$$\theta' = \frac{V' - V''}{V'} \times RS;$$

pour un troisième intervalle θ :

$$\theta'' = \frac{V'' - V'''}{V''} \times RS,$$

et ainsi de suite.

En faisant la somme pour un certain nombre d'intervalles de temps $\theta + \theta' + \theta \ldots\ldots = t$, on a :

$$t = RS \sum \frac{V - V'}{V}.$$

Si V_1 est la valeur du potentiel au début de l'expérience et V_2 sa valeur au bout du temps t, on a pour la valeur de $\sum \frac{V - V'}{V}$ entre ces deux limites :

$$\log \text{nép.} \frac{V_1}{V_2} \text{ (*)},$$

et par suite :

$$t = RS \log \text{nép.} \frac{V_1}{V_2},$$

d'où l'on déduit :

$$R = \frac{t}{S \log \text{nép.} \frac{V_1}{V_2}} = \frac{t}{2{,}718 S \log \frac{V_1}{V_2}} \text{ (**)}.$$

(*) En remplaçant $V - V'$ par dV, $\sum \frac{V - V'}{V}$ devient $\int_{V_2}^{V_1} \frac{dV}{V} = \log \text{nep} (V_1 - V_2)$.

(**) Remarquons que la capacité électrostatique ayant pour dimension une longueur L, la résistance R est représentée par l'inverse d'une vitesse $\frac{T}{L}$, ainsi que cela doit avoir lieu (n° 109).

Cette formule fait connaître la valeur absolue de la résistance R lorsqu'on a déterminé d'avance la capacité électrostatique S du conducteur. Pour avoir le rapport des potentiels $\frac{V_1}{V_2}$, il suffit d'observer les indications d'un électromètre quelconque préalablement gradué, et qu'on laisse en communication avec le corps électrisé.

123. — Cette méthode n'est applicable que si la décroissance du potentiel est assez lente et par conséquent que si la résistance opposée à l'écoulement du fluide est très-considérable; on ne peut en faire usage que pour de mauvais conducteurs, tels que fils de soie, de coton, etc.

Elle peut être aussi employée pour la mesure de l'isolement des conducteurs sous-marins.

Le câble ayant son armature extérieure en communication avec la terre, on isole le conducteur à l'une de ses extrémités, et l'on met l'autre, pendant un instant, en relation avec une source électrique qui lui communique un potentiel V, puis on observe la décroissance du potentiel en suivant les indications d'un électromètre qu'on laisse en communication avec le conducteur. Ordinairement on détermine le temps qu'emploie le potentiel à perdre la moitié de sa valeur; en représentant ce temps par t, on a :

$$R = \frac{t}{2,718 \, S \log 2} = \frac{t}{0,216 \, S}$$

ou

$$RS = \frac{t}{0,216}.$$

On en déduit la valeur de la résistance R, si la capacité électrostatique S a été préalablement déterminée ou la capacité électrostatique S si la résistance R est connue par une autre méthode.

La résistance R de l'enveloppe est en raison inverse de la longueur du câble essayé, tandis que la capacité électrostatique S lui est proportionnelle; la durée de la décharge t est donc indépendante de cette longueur, pour un câble sous-marin dont l'enveloppe est formée d'une matière isolante déterminée.

Ainsi qu'on l'a vu au n° 120, le produit RS est égal au produit $\frac{\rho c}{4\pi}$; on déduit donc de l'expérience que nous venons d'indiquer le produit de la résistance spécifique de la matière isolante ρ par sa capacité inductrice spécifique c.

L'expérience se fait avec une pile composée d'un grand nombre d'éléments (4 à 500) et un électromètre ordinaire.

Un des pôles de la pile étant en communication avec la terre, on note d'avance les indications de l'électromètre quand on le met en communication d'abord avec l'extrémité, puis avec le milieu de la pile. On relie alors le conducteur à essayer à l'électromètre et, pendant un instant, on le fait communiquer avec le pôle libre de la pile entière, dont il prend le potentiel, puis on l'isole; le potentiel décroît par suite du passage de l'électricité à travers l'enveloppe et, en suivant les indications de l'électromètre, on observe le temps nécessaire pour que l'électromètre n'accuse plus que la déviation correspondante à la moitié de la pile, c'est-à-dire pour que le potentiel décroisse de moitié.

Pour la gutta-percha employée dans la construction du câble transatlantique français et de la plupart des câbles posés dans ces dernières années, le temps nécessaire pour que le conducteur perde la moitié de son électricité est de 21 minutes.

124. — Cette méthode pour l'essai des câbles sous-

marins, qui est due à M. Siemens, a l'avantage d'être indépendante de la longueur sur laquelle on opère; elle ne donne pas toutefois une précision absolue, parce que le pouvoir inducteur spécifique de la matière isolante varie un peu avec la durée de la charge.

Pour que les résultats obtenus avec diverses substances isolantes soient comparables, il faut que la durée de la communication avec la source électrique soit la même. On adopte ordinairement une minute.

Ainsi donc avec la gutta-percha perfectionnée on a

$$\frac{\rho c}{4\pi} = \mathrm{RS} = \frac{21 \times 60''}{0{,}216} = \frac{1260''}{0{,}216},$$

d'où

$$\rho c = \frac{4\pi \times 1260''}{0{,}216} = 73200''.$$

Le pouvoir spécifique inducteur c de la gutta-percha pris par rapport à l'air est environ 3; la valeur de la résistance spécifique ρ est donc environ 24.400 secondes (*).

État variable.

125. — Dans les longs conducteurs, le potentiel aux divers points est dû à l'électricité qui est répandue à leur

(*) On a vu (n° 110) que la résistance spécifique absolue d'une substance est exprimée par un intervalle de temps.

Le facteur 4π, qui se trouve au dénominateur dans l'équation $\mathrm{RS} = \frac{\rho c}{4\pi}$, tient à ce que nous avons adopté pour unité de pouvoir inducteur spécifique, comme on le fait généralement, celui de l'air, qui ne correspond pas aux unités absolues. Pour rentrer dans le système général de ces unités, il aurait fallu représenter le pouvoir inducteur spécifique de l'air par 4π. Celui c' d'une substance quelconque, au lieu d'être c, deviendrait $c' = \frac{c}{4\pi}$, et l'on aurait :

$$\mathrm{RS} = \rho c'.$$

surface et à celle qui se trouve accumulée soit directement, soit par influence sur les corps environnants. L'électrisation n'est pas instantanée; au moment où l'on met le conducteur en communication avec une ou plusieurs sources électriques, il prend une charge qui augmente peu à peu jusqu'à ce qu'aux divers points du circuit elle soit telle que le potentiel dû à cette charge et à celle qui se développe par influence sur les conducteurs voisins, varie d'une manière continue, en suivant la loi d'Ohm. Pendant ce temps qui constitue la période variable du courant, l'électricité se trouve à l'état libre, non-seulement aux surfaces de séparation des divers corps qui composent le circuit, mais encore à l'intérieur de chacun d'eux.

Lorsque le circuit ne comprend qu'un seul conducteur, on peut déterminer, en appliquant la formule de Fourier sur la propagation de la chaleur, la valeur du potentiel aux divers points en fonction du temps.

On trouve ainsi que le temps nécessaire pour que le courant atteigne une fraction déterminée de sa valeur définitive est proportionnel au carré de la longueur de la ligne, à la capacité électrostatique du conducteur et en raison inverse de sa conductibilité.

Lorsque le circuit est formé de plusieurs conducteurs dont les sections, les conductibilités ou les capacités électrostatiques sont différentes, on ne peut obtenir par l'analyse la solution générale du problème.

Échauffement des conducteurs traversés par un courant.

126. Le courant électrique jouit de certaines propriétés : les unes sont une conséquence directe de l'applica-

tion à l'électricité du principe de la conservation des forces vives; les autres pourraient probablement se déduire du même principe si nous connaissions la véritable nature de l'électricité et ses relations avec l'éther, par l'intermédiaire duquel a sans doute lieu la transmission des forces et des mouvements; mais dans l'état actuel de nos connaissances, nous sommes réduits à déduire ces propriétés de l'expérience, sauf à compléter les résultats qu'elle fournit par l'application de ce principe.

Dans la première catégorie figure la loi de l'échauffement d'un conducteur sous l'action d'un courant qui le traverse, dite loi de Joule, qui peut être considérée comme une loi élémentaire de la propagation.

L'échauffement des conducteurs paraît devoir être attribué au frottement du fluide électrique contre les molécules matérielles des corps, qui absorbent la force vive et entrent en vibration en produisant de la chaleur.

Joule a prouvé par l'expérience que la quantité de chaleur développée pendant l'unité de temps par un courant constant entre deux points d'un circuit, s'il n'existe pas entre eux de force électromotrice, est proportionnelle au carré de l'intensité du courant I et à la résistance R du conducteur entre ces deux points. En désignant par C*h* la chaleur développée et par K une constante, on a donc :

$$Ch = KI^2R;$$

pendant un intervalle de temps T, la chaleur développée est :

$$Ch = KI^2RT.$$

Cette formule peut se déduire du principe de la conservation des forces vives combiné avec la loi d'Ohm, qui elle-même repose, ainsi qu'on l'a vu (n° 103), sur l'absorption complète de l'énergie électrique par les conducteurs, et

cette déduction permet de fixer la valeur du coefficient K.

On a vu en effet (nº 46) que $V-V'$ représente le travail développé par l'unité de quantité d'électricité pour passer d'une surface de niveau dont le potentiel est V à une surface de niveau dont le potentiel est V'; le travail développé par la quantité q d'électricité, lorsqu'elle passe de l'une des deux surfaces de niveau à l'autre, est $q(V-V')$.

Supposons maintenant le conducteur qui est traversé par le courant partagé en tranches par des surfaces de niveau très-rapprochées les unes des autres ; si q représente la quantité d'électricité qui, dans un intervalle de temps très-petit, θ, passe de la première surface à la seconde, une égale quantité passera de la seconde à la troisième, de la troisième à la quatrième, et ainsi de suite.

Si V_1 est le potentiel de la première surface, V_a, V_b, V_c, ... V_n et V_2 les potentiels des tranches suivantes, le travail développé par la quantité d'électricité q pour passer de la première surface à la seconde dans l'intervalle de temps θ est $q(V_1-V_a)$; le travail développé par une même quantité pour passer de la seconde à la troisième surface est $q(V_a-V_b)$; de la troisième à la quatrième, $q(V_b-V_c)$ et ainsi de suite.

La somme de ces expressions donne le travail développé par le courant pendant l'intervalle de temps θ entre les surfaces de niveau V_1 et V_2 ; il est égal à à $q(V_1-V_2)$.

La quantité d'électricité q, qui passe pendant un intervalle de temps T, est égale au produit de l'intensité I par T. Le travail développé W est donc $IT(V_1-V_2)$, ou IE, si l'on remplace la différence des potentiels V_1-V_2 par la force électromotrice E :

$$W = IET \text{ (*)},$$

(*) Cette formule est la même que celle du travail développé par un

ou

$$W = I^2RT,$$

puisqu'en vertu de la loi d'Ohm

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{ou} \quad E = IR.$$

Lorsque l'électricité traverse un conducteur, elle n'acquiert pas de force vive et la loi d'Ohm en est la conséquence; s'il ne se produit pas de travail extérieur, la force vive de l'électricité W est entièrement absorbée par le conducteur et se transforme en chaleur qui élève sa température. La chaleur développée dans l'intervalle de temps T doit être l'équivalent du travail W ou de la quantité I^2RT.

L'unité absolue de travail est équivalente à 1 calorie divisée par 4.168.800 (n° 29); la quantité de chaleur Ch qui correspond à I^2RT et qui est développée dans le conducteur, exprimée en calories, est donc :

$$Ch = \frac{I^2RT}{4168\,800},$$

ou

$$Ch = C_1 I^2RT,$$

si l'on pose :

$$C_1 = \frac{1}{4168\,800}.$$

On a ainsi une nouvelle relation qui permet de calculer en valeur absolue l'intensité I du courant lorsque la résistance R est connue ainsi que la chaleur développée, ou réciproquement.

Si l'on supposait la loi de Joule préalablement démontrée par l'expérience, on pourrait en déduire la loi d'Ohm

courant d'eau fournissant une quantité I d'eau par seconde et qui tomberait d'une hauteur E.

En remplaçant dans la formule $W = IET$ les lettres W, I et E par leurs valeurs en fonctions des unités élémentaires de temps, de masse et de longueur, on est conduit naturellement à une identité.

car on aurait simultanément :

$$Ch = KIET$$

et

$$Ch = KI^2RT,$$

d'où

$$IE = I^2R$$

et

$$I = \frac{E}{R}.$$

127. — Les formules précédentes s'appliquent au circuit entier parcouru par le courant si E représente la somme de toutes les forces électromotrices et R celle de toutes les résistances qui composent le circuit.

Soient en effet R_1, R_2, R_3, etc. les résistances des divers conducteurs dont se compose le circuit, et dont la somme est égale à R, l'intensité du courant qui traverse chacun d'eux est la même. Quant à la chaleur développée pendant l'unité de temps, elle est :

Pour le premier conducteur. . . . $Ch_1 = C_1I^2R_1$
Pour le second. . . . . $Ch_2 = C_1I^2R_2$
Pour le troisième. . . . . $Ch_3 = C_1I^2R_3$

et ainsi de suite.

La chaleur totale développée est

$$Ch = Ch_1 + Ch_2 + Ch_3 + \ldots\ldots$$
$$= C_1I^2(R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots)$$

ou

$$Ch = C_1I^2R.$$

Si E_1, E_2, E_3, etc. sont les valeurs absolues des diverses forces électromotrices qui agissent sur le circuit et dont la somme algébrique est E :

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots$$

et

$$I = \frac{E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots}{R}$$

et par suite la chaleur totale développée dans le circuit peut aussi se mettre sous la forme :

$$Ch = C_1 I (E_1 + E_2 + E_3 \ldots\ldots)$$

ou

$$Ch = C_1 IE.$$

En outre de la chaleur qu'il développe dans le conducteur, le courant électrique peut produire un travail spécial ; c'est ce qui a lieu lorsqu'il traverse une substance qu'il décompose, lorsqu'il attire ou éloigne un autre courant ou un aimant, lorsqu'il produit l'aimantation d'un fer doux autour duquel il circule. Dans ces divers cas, le courant produit un travail extérieur, et par suite l'échauffement du conducteur doit diminuer.

L'échauffement étant égal à $C_1 I^2 R$ ou à $\frac{C_1 E^2}{R}$, et la résistance R n'étant pas modifiée, il faut en conclure que la force électromotrice totale E est diminuée, et que par suite du travail effectué, il se développe une force électromotrice contraire à celle qui agit sur le circuit.

Telle est l'origine des forces électromotrices de polarisation et d'induction.

La chaleur que développe un courant dans un conducteur et le travail qu'il produit lorsqu'il attire ou repousse un autre courant, aimante un barreau de fer doux, décompose un corps composé, doivent correspondre à une perte égale d'énergie, de chaleur ou de force vive.

Dans les machines électriques à frottement et dans les appareils magnéto-électriques, l'énergie est fournie par le travail qu'il faut dépenser pour mettre la machine en mouvement, dans les piles thermo-électriques, par la chaleur qui chauffe l'une des soudures ; dans les piles ordinaires, par le travail des actions moléculaires.

CHAPITRE VI.

ORIGINES ET PROPRIÉTÉS DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

Développement de l'électricité à un haut potentiel.

128. *Développement de l'électricité par le frottement.* — Lorsque deux substances hétérogènes sont en contact, il se produit à la surface de séparation une différence de potentiel dont l'origine nous est inconnue, mais que l'on constate par ce fait que, si l'on sépare les deux substances, on trouve l'une d'elles chargée d'électricité positive et l'autre d'électricité négative; il en résulte que pour opérer cette séparation, il faut développer plus de force ou de travail qu'il n'en a fallu pour amener les deux substances en contact; la différence se retrouve sous forme d'énergie électrique.

Telle est probablement l'origine du développement de l'électricité dans les machines dites à frottement.

Les machines électriques ordinaires comprennent comme parties essentielles un plateau tournant en verre ou en caoutchouc durci, des frotteurs en cuir et un conducteur isolé.

Au contact des coussins, le plateau se charge d'électricité positive s'il est en verre, ou négative s'il est en caoutchouc ou en ébonite, tandis que les coussins prennent le fluide contraire. Si l'on fait tourner le plateau isolant, le fluide dont il est chargé est entraîné; il devient libre et en passant à une petite distance de pointes ou

de boules reliées au conducteur, il décompose par influence le fluide neutre de ce dernier, attire l'électricité de nom contraire et laisse libre l'électricité de même nom.

Quant au fluide développé sur les coussins, il se rend dans le sol ou électrise un second conducteur, suivant la forme de la machine.

La charge du conducteur augmente à mesure qu'on fait tourner le plateau de verre, mais ce dernier cède de moins en moins d'électricité en passant devant les pointes, et il arrive un moment où la charge ne s'accroît plus sensiblement.

Le potentiel qu'on peut développer dépend de la nature des corps qui produisent l'électricité par leur frottement, de l'état hygrométrique de l'air ambiant et de l'isolement plus ou moins grand des conducteurs.

Quant à la charge, elle est égale au produit du potentiel développé par la capacité électrostatique du conducteur qui dépend de ses dimensions et de sa forme, et qu'on peut augmenter par l'addition de condensateurs dont on met une des armatures en communication avec la terre.

Les conducteurs ou condensateurs électrisés par une machine possèdent une énergie électrique égale à la moitié du produit de leur charge par le potentiel développé (n° 88); cette énergie correspond au travail qu'il a fallu développer en sus des frottements ordinaires pour faire mouvoir la machine, c'est-à-dire pour vaincre l'attraction des fluides contraires développés sur les coussins et sur le plateau, la partie qui s'éloigne des coussins étant attirée avec plus de force que la portion qui s'en rapproche, qui a perdu tout ou partie de son électricité.

129. *Développement de l'électricité au contact de deux métaux.* — Le contact de deux métaux donne également

lieu à une différence de potentiels, mais en raison de leur conductibilité, on ne peut, pour accroître la charge, adopter la forme de la machine ordinaire. M. Thomson y est parvenu en adoptant la disposition suivante :

Sur un cylindre de zinc repose un entonnoir en cuivre dont l'extrémité se trouve à peu près au milieu de la hauteur du cylindre. On verse dans l'entonnoir de la limaille de cuivre qui traverse, sans le toucher, le cylindre de zinc et tombe sur un bassin isolé, disposé pour recevoir la charge électrique.

Au contact du cuivre et du zinc, il se produit une différence de potentiel, celui du zinc étant positif et celui du cuivre négatif ou du moins inférieur à celui du zinc.

Chaque goutte de limaille, au moment où elle s'échappe, est électrisée négativement par influence et emporte le fluide négatif qui charge de plus en plus le bassin inférieur.

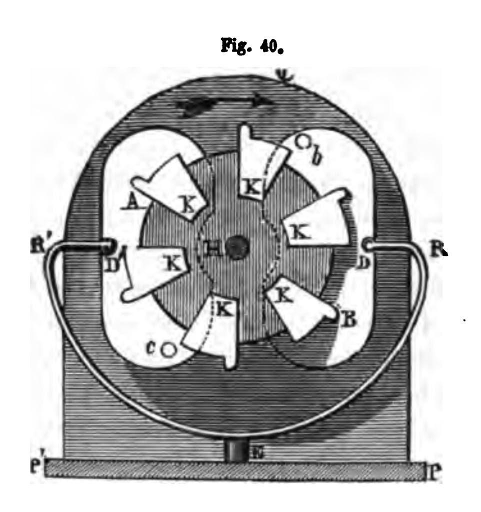
L'énergie de la charge électrique acquise par le bassin correspond à une diminution de la chaleur développée par le choc des gouttes qui, soumises à l'attraction du cylindre de zinc, tombent un peu plus lentement que si elles étaient libres, et aussi au refroidissement de la soudure qui cède de la chaleur lorsqu'elle est traversée par l'électricité.

130. *Machines électriques fondées sur l'influence.* — Ces machines reposent sur la décomposition par influence du fluide neutre.

Un corps préalablement électrisé décompose le fluide neutre des conducteurs situés dans le voisinage en attirant l'électricité de nom contraire et repoussant celle de même nom qui s'écoule dans le sol, si pendant un instant on met le conducteur influencé en communication avec la terre.

En tournant la roue en ébonite, les pièces conductrices K, K, K rencontrent successivement des contacts *b* et *c* qui les mettent en relation avec les pièces métalli-

Fig. 40.



ques, et des contacts D et D′, qui sont reliés à la terre par le montant RER′.

On communique préalablement une petite charge électrique à l'une des pièces A ou B, et l'on fait tourner la roue en ébonite dans le sens de la flèche.

Supposons la pièce A électrisée positivement. Chaque mobile K en passant devant le contact D′ s'électrise négativement par influence, son électricité positive allant dans le sol, puis en rencontrant le contact *b* il abandonne son électricité négative qui se porte à l'extérieur de la pièce B; il s'électrise positivement au moment où il rencontre le contact D et abandonne son électricité positive à la pièce A lorsqu'il rencontre le contact *c*. La charge des deux pièces métalliques A et B augmente donc peu à peu, jusqu'à ce qu'il éclate des étincelles.

On peut se dispenser de mettre les contacts D et D' en communication avec la terre; il suffit de les mettre en relation l'un avec l'autre par un conducteur métallique.

En tournant la roue H en sens contraire, on produirait évidemment la décharge des deux conducteurs A et B.

On obtiendrait en B des charges croissant à chaque tour de quantités égales en supprimant les boutons *c* et D et en mettant le bouton D' en communication avec la terre, à la condition toutefois que la charge de A reste constante.

C'est un appareil de ce genre, dont la forme est seulement un peu différente, que M. Thomson a joint à son électromètre à quadrant (n° 69) pour recharger le condensateur qui électrise la feuille mobile d'aluminium, lorsque son potentiel diminue, ce qu'on reconnaît aux indications d'une jauge, et, comme nous l'avons dit, l'appareil peut être disposé de façon à se recharger automatiquement à mesure que la charge décroit.

C'est aussi un rechargeur que M. Thomson a appliqué à son *cracheur d'encre* destiné à l'enregistrement, sans frottement, des signaux transmis à travers les câbles sous-marins, signaux qu'on obtient à l'aide de courants extrêmement faibles. Un siphon plonge d'une part dans l'encre et de l'autre arrive à une très-petite distance du papier sur lequel les signaux doivent s'enregistrer. Il est mis en mouvement par une bobine qui se meut sous l'influence du courant de la ligne, et oscille parallèlement au papier; ce dernier passe sur un cylindre qui est maintenu par un rechargeur à un potentiel élevé. L'encre étant au potentiel zéro est attirée, se projette sur le papier, et y laisse une trace continue qui, par ses sinuosités, fait connaître les signaux transmis.

132. *Rendement des machines électriques.* — Le ren-

dement des machines électriques peut être étudié à deux points de vue différents, suivant qu'on envisage l'électricité développée à l'état statique ou à l'état dynamique.

On peut, en premier lieu, chercher le potentiel maximum qu'une machine est susceptible de développer sur un conducteur isolé, potentiel qui dépend de la forme et des dimensions de la machine, et de l'état hygrométrique de l'air ambiant.

Les machines électriques de Holtz sont celles qui développent le plus haut potentiel.

Nous avons indiqué, au n° 96, le chiffre 30 comme représentant en unités électrostatiques absolues (les unités fondamentales étant le mètre, la masse du gramme et la seconde) le potentiel maximum que l'on peut développer dans les meilleures conditions à l'aide des plus fortes machines.

L'étude des machines électriques au point de vue dynamique consiste à chercher l'intensité du courant continu qu'elles peuvent produire, avec une vitesse de rotation connue du plateau tournant, sur un circuit d'une résistance donnée.

MM. Gauss et Poggendorff, qui ont fait les premiers cette étude, n'ayant employé que des circuits peu résistants, n'observèrent pas de variation de courant en faisant varier la grandeur de la résistance; elle a été reprise par M. Kohlrausch, puis par M. Rosetti qui ont été conduits à des conclusions différentes.

Suivant M. Rosetti, les machines électriques ordinaires à plateau tournant constituent des électromoteurs qui donnent lieu, lorsqu'on les met en mouvement, à des courants électriques soumis aux mêmes lois que les courants des piles voltaïques, c'est-à-dire que l'intensité du courant développé dans un conducteur est proportion-

nelle à la force électromotrice de la machine et en raison inverse de la résistance extérieure, augmentée d'une quantité déterminée qui représente la résistance de la machine (*).

La force électromotrice dépend de la vitesse de rotation et de l'état hygrométrique de l'air ambiant ; elle décroît, à mesure que le degré d'humidité de l'air environnant augmente.

Quant à la résistance, elle varie avec la vitesse de rotation du plateau mobile et diminue à mesure que cette vitesse s'accroît, mais la diminution suit une loi un peu plus rapide que l'accroissement de la vitesse.

D'après les expériences de M. Rosetti, la plus grande force électromotrice que l'on peut développer avec une machine de Holtz serait environ 52.000 fois plus grande que celle d'un élément Daniell; en unités électrostatiques absolues elle serait donc $52.000 \times 0,000.374$ ou environ 20 : [0,000.374 étant celle de l'élément Daniell].

La différence entre ce chiffre et le chiffre 30 que nous avons déduit des expériences de M. Thomson (n° 96) s'explique par l'influence des dimensions et des formes des machines et des conditions de l'expérience.

Quant à la résistance intérieure de l'électromoteur de Holtz, ou à la grandeur qui, dans la formule, correspond à cette résistance, elle est très-considérable et décroît à mesure que la vitesse augmente. Pour une bonne machine de Holtz, elle peut être évaluée, suivant M. Rosetti, à 2.810 millions d'unités Siemens (**) avec une vitesse

(*) *Annales de physique et de chimie*, année 1875.

(**) On sait que l'unité Siemens est la résistance d'une colonne de mercure d'un mètre de hauteur et d'un millimètre carré de section et correspond à celle d'un fil de fer de 4 millimètres de diamètre et de 100 mètres de longueur.

de rotation du plateau tournant de 2 tours par seconde.

Avec une vitesse de 8 tours par seconde, qui est une bonne vitesse pratique, la résistance de la machine est de 570 millions d'unités Siemens ou environ 57 millions de kilomètres de fil de fer de $4^{m}/^{m}$ de diamètre.

Lorsqu'on fait usage de fils métalliques pour fermer le circuit, leur résistance disparaît devant la résistance intérieure de la machine; c'est ce qui explique comment MM. Weber et Poggendorff, qui faisaient usage de résistances extérieures trop faibles, n'ont pas constaté qu'elles eussent de l'influence sur l'intensité du courant.

Si l'on représente par 1 l'intensité du courant produite par un seul élément Daniell sur un circuit total ayant pour résistance 1 kilomètre de fil de fer de $4^{m}/^{m}$ de diamètre (ou 10 unités Siemens), l'intensité du courant que donnera une bonne machine électrique de Holtz tournant avec une vitesse de 8 tours par seconde, dans les meilleures conditions atmosphériques, sur un circuit de résistance R, R étant exprimé en kilomètres de fil de fer de $4^{m}/^{m}$, sera :

$$I = \frac{52.000}{R + 57.000.000}.$$

Si l'on néglige la résistance extérieure R,

$$I = \frac{52}{57.000} = \frac{1}{1100}.$$

L'intensité maximum fournie par la machine est donc $\frac{1}{1.100}$ de celle produite par un élément Daniell sur un circuit total d'un kilomètre, ou égale à celle d'un seul élément Daniell agissant sur un circuit de 1.100 kilomètres de fil de fer de $4^{m}/^{m}$ de diamètre.

133. — On peut, nous semble-t-il, déduire l'ana-

logie entre les lois des machines électriques et celles des piles de l'examen des faits.

Prenons comme exemple une machine à frottement dont les coussins sont en communication avec la terre. Le plateau de verre prend au contact des coussins une charge électrique qui devient libre lorsque la partie frottée s'en éloigne; représentons par V le potentiel de cette charge, lorsqu'elle arrive en face des pointes par lesquelles une partie du fluide s'échappe pour se rendre dans le sol par un conducteur de résistance R. Soit V_1 le potentiel du conducteur auprès des pointes; la quantité d'électricité perdue par le plateau pendant l'unité de temps est $(V - V_1)hu$, en représentant par u la vitesse de rotation et par h une constante dépendant de la forme de la machine. L'intensité I du courant dans le conducteur, qui, d'après la formule d'Ohm, a pour expression $I = \frac{V_1}{R}$, est égale à la quantité d'électricité perdue par le plateau.

On a donc :

$$(V - V_1)hu = \frac{V_1}{R};$$

d'où l'on tire :

$$V_1 = \frac{huVR}{1 + huR},$$

et par suite l'intensité I devient

$$I = \frac{V}{\frac{1}{hu} + R}.$$

Le terme $\frac{1}{hu}$ représente ce qu'on peut appeler la résistance de l'électromoteur.

Les choses se passent de la même manière avec les machines de Holtz, de Bertsch, etc., mais il n'en est pas

de même pour celles dont nous avons parlé au n° 132, telle que celle de Varley, car la quantité d'électricité fournie par l'appareil pendant l'unité de temps est constante, c'est-à-dire indépendante de la situation électrique des conducteurs par lesquels se fait la décharge.

Si les deux conducteurs A et B (*fig.* 40) sont reliés par un fil métallique, l'intensité du courant sera égale à $\frac{V}{R}$, V étant la différence du potentiel des deux plaques métalliques et R la résistance du fil qui les réunit.

Lorsque la machine est en mouvement, la différence de potentiel V augmente donc jusqu'à ce que l'intensité du courant $I = \frac{V}{R}$ soit égale à la quantité d'électricité fournie dans l'unité de temps par la machine, qui dépend de sa forme et de la vitesse de rotation.

FORCE ÉLECTROMOTRICE DE CONTACT. — COURANTS THERMO-ÉLECTRIQUES.

134. *Force électromotrice due au simple contact.* — Volta a établi la théorie de la pile électrique en partant du principe que le simple contact de deux métaux produit une différence de tension ou de potentiel; cette théorie, complétée par les découvertes récentes, est adoptée aujourd'hui par un certain nombre de physiciens.

L'expérience de M. Thomson, que nous avons citée (n° 129), met hors de doute le développement d'électricité au simple contact de deux métaux; si le couple des deux métaux est isolé, l'un d'eux se charge d'électricité positive, l'autre d'une quantité égale d'électricité né-

gative, et les charges sont telles que la différence des potentiels des deux corps soit une quantité fixe, qui dépend de leur nature.

Lorsqu'on connaît la différence de potentiel, E, produite par le contact de deux corps et leurs capacités électrostatiques, A et B, on peut en déduire la valeur des potentiels V et V', et par suite les charges AV et BV' de ces deux corps. On a, en effet :

$$V - V' = E,$$
$$AV + BV' = 0,$$

d'où l'on tire

$$V = \frac{BE}{A + B} \quad \text{et} \quad V' = -\frac{AE}{A + B}.$$

Les charges, égales et de signe contraire, sont $\frac{ABE}{A + B}$ et $-\frac{ABE}{A + B}$.

Si les deux corps en contact sont en communication avec une source électrique développant un potentiel V_1, leurs potentiels deviennent $V_1 + V$ et $V_1 + V'$.

L'énergie électrique des charges qui se trouvent répandues sur les surfaces extérieures des deux conducteurs en contact et la chaleur qui s'est développée pendant la transmission de l'électricité à travers les corps doivent correspondre à une perte équivalente d'énergie ou de chaleur. Le fait, découvert par Peltier, du refroidissement d'une soudure ou de son échauffement suivant qu'un courant la traverse dans la direction de la force électromotrice de contact ou dans une direction contraire paraît donner la clef de ce phénomène ; la chaleur perdue par la soudure pendant la charge, et qui produit son refroidissement, doit être équivalente à la charge absorbée par les conducteurs pendant la transmission du

fluide, augmentée de l'énergie de la couche électrique. Toutefois cette explication n'est pas entièrement satisfaisante, car la chaleur ne peut passer directement d'un point à un autre que si la température du dernier est moins élevée.

L'énergie électrique développée sur deux corps en contact est du reste très-faible; aussi la perte de chaleur de la soudure est-elle imperceptible dans le cas où deux corps isolés sont électrisés par leur simple contact, mais rien n'empêche de concevoir un système de conducteurs assez étendu pour que cette perte ne soit pas négligeable.

Il convient de remarquer qu'outre les charges électriques qui se portent sur les surfaces extérieures de deux corps en contact, et qui dépendent de leur forme et de leur étendue, il se développe sur les deux surfaces qui se touchent des charges égales d'électricités contraires, qui restent en présence sans se combiner, et doivent être telles que la condition de l'égalité du potentiel soit remplie dans toute l'étendue de chacun des deux conducteurs, c'est-à-dire que la somme $\sum \frac{q}{r}$ (n° 47) soit constante pour chacun d'eux.

Les deux couches ne doivent pas être considérées comme restant en présence, à la surface idéale de séparation des deux corps; elles occupent sans doute de chaque côté de cette surface un petit espace, de sorte que la variation du potentiel de l'un des corps à l'autre n'est pas dans un sens rigoureusement mathématique un saut brusque, mais un changement très-rapide dans le voisinage de cette surface.

Ces deux couches électriques contraires ne sont séparées par aucun corps isolant; quelle est la force qui les

empêche de se combiner et d'équilibrer directement leur état électrique? Suivant Helmholtz ce fait tiendrait à ce que les diverses substances exercent des attractions différentes sur les deux électricités; d'après Clausius c'est la *chaleur qui agit dans la formation et la conservation de la différence de niveau potentiel au contact, en ce que le mouvement moléculaire, que nous nommons chaleur, pousse l'électricité d'une substance vers l'autre, et que son action ne peut être contre-balancée que par l'action contraire des deux couches électriques ainsi produites, lorsque celles-ci ont atteint une certaine densité* (*). Les phénomènes thermo-électriques justifient cette conception.

Quoi qu'il en soit, il résulte de la présence de ces deux couches électriques contraires qu'il faut développer, pour séparer deux corps, plus d'énergie qu'il n'en a fallu pour les amener au contact; la différence se retrouve sous forme d'énergie électrique, ainsi qu'on l'a vu dans l'étude des machines électriques à frottement (n° 128).

135. Considérons, au lieu de deux métaux isolés en contact, une chaîne fermée formant un circuit complet. Si elle ne comprend que deux métaux et si la température est uniforme, il ne peut se produire de courant, puisque les deux forces électromotrices de contact sont égales et agissent en sens contraire.

L'expérience prouve également qu'il ne se produit pas de courant dans une chaîne composée de plusieurs métaux, A, B, C, D, E, lorsque les soudures sont à une température uniforme, d'où il faut conclure que la force électromotrice développée au contact de deux des métaux A.B est égale et de sens contraire à la somme algébrique des forces électromotrices dues aux autres contacts

(*) *Théorie mécanique de la chaleur*, de Clausius, traduction de M. Folie.

B.C, C.D, D.E et E.A. Ce fait peut être considéré comme évident, car si les forces électromotrices ne s'annulaient pas, il se produirait un courant, et le travail, ou la chaleur qu'il développerait, ne correspondrait à aucune perte de chaleur ou d'énergie (*).

La détermination de la force électromotrice de contact présente d'assez grandes difficultés. Suivant M. Thomson, celle qui correspond au contact du fer et du cuivre serait la moitié de celle d'un élément Daniell.

L'expérience de Peltier, rapportée plus haut, et les phénomènes thermo-électriques mettent hors de doute le développement de l'électricité au contact de deux métaux. Un certain nombre de physiciens attribuent au simple contact des métaux la force électromotrice des piles hydro-électriques, l'action chimique, suivant eux, ayant seulement pour effet d'entretenir la différence du niveau potentiel ; pour nous, nous croyons, avec beaucoup d'autres, que la force électromotrice de contact ne joue qu'un rôle secondaire dans la production des courants électriques ordinaires.

Comme le fait remarquer M. Maxwell, la force électromotrice de contact doit être représentée par eC, e étant la chaleur absorbée à la jonction des métaux par le passage d'un courant d'intensité égale à l'unité, et C l'équivalent mécanique de la chaleur.

La force électromotrice trouvée par l'expérience, qui est en général beaucoup plus considérable que celle due au simple contact, tient sans doute à des causes accessoires, telles que l'action chimique entre les métaux et l'air plus ou moins humide environnant.

(*) Il convient cependant de remarquer que ce travail pourrait, à la rigueur, correspondre à une perte de chaleur due au refroidissement d'une ou de plusieurs des soudures, comme dans le cas où, le circuit étant ouvert, les métaux prennent des potentiels différents.

136. *Courants thermo-électriques.* — La force électromotrice due au contact de deux métaux différents varie avec la température de la surface de contact; telle est l'origine des courants dits thermo-électriques.

Si deux métaux forment un circuit, et si les soudures sont à des températures différentes, il se produit un courant dont la direction et l'intensité dépendent de la nature des métaux, de la différence des températures et de la moyenne de ces températures.

La force électromotrice développée est sensiblement proportionnelle à la différence des températures des soudures, lorsque ces températures ne dépassent pas 100°. Au delà de cette limite, elle varie d'une façon assez irrégulière.

On nomme pouvoir *thermo-électrique* de deux métaux la grandeur de la force électromotrice développée, pour une différence de température d'un degré centigrade, des soudures.

Le pouvoir thermo-électrique de deux métaux est égal à la somme de leurs pouvoirs thermo-électriques par rapport à un troisième métal. Ce fait résulte de la proposition rappelée plus haut qu'il ne se manifeste pas de courant dans une chaîne dont toutes les soudures sont à une température uniforme.

Considérons, en effet, trois métaux A, B et C; s'ils forment un circuit fermé A.B.C, à une température uniforme t, il ne se produit aucun courant; la force électromotrice $\varphi_t(C.A)$ due au contact C.A est donc égale et de signe contraire à la somme des forces électromotrices $\varphi_t(A.B)$ et $\varphi_t(B.C)$ des contacts A.B et B.C, donc

$$\varphi_t(C.A) + \varphi_t(A.B) + \varphi_t(B.C) = 0$$

et la force électromotrice $\varphi_t(A.C)$, produite par le con-

tact A.C, étant égale et de signe contraire à celle que produit le contact C.A, ou à φ_t (C.A), on a

$$\varphi_t(A.C) = \varphi_t(A.B) + \varphi_t(B.C).$$

pour une autre température θ, on a

$$\varphi_\theta(A.C) = \varphi_\theta(A.B) + \varphi_\theta(B.C).$$

En faisant la différence il vient

$$\varphi_t(A.C) - \varphi_\theta(A.C) = \varphi_t(A.B) - \varphi_\theta(A.B) + \varphi_t(B.C) - \varphi_\theta(B.C).$$

ou

$$E_{AC} = E_{AB} + E_{BC}$$

en représentant par E_{AC}, E_{AB} et E_{BC}, les forces électromotrices produites par la différence des températures $t - \theta$ des soudures A.C, A.B et B.C.

Si l'on connaissait les différences de potentiel développées à toutes les températures par le contact des divers corps, on en déduirait la force électromotrice d'un arrangement thermo-électrique quelconque.

L'exécution d'un pareil tableau présenterait de grandes difficultés, et l'on a dû se borner à déterminer directement les forces électromotrices qui correspondent à une différence donnée de température des soudures.

Un métal est dit électro-positif par rapport à un autre lorsque dans la soudure chaude le courant marche du premier au second (*).

137. M. Becquerel a le premier classé les métaux d'après l'ordre de leur pouvoir thermo-électrique : le bismuth et l'antimoine occupent les deux rangs extrêmes.

Le tableau suivant dressé par M. Mathiessen donne la force électromotrice des divers métaux par rapport au

(*) Remarquons qu'il serait peut-être plus rationnel de nommer au contraire électropositif celui des deux métaux qui s'électrise positivement à la soudure chaude, c'est-à-dire celui vers lequel se dirige le courant à travers cette soudure.

plomb pour une température moyenne de 19 à 20 degrés centigrades; chaque métal est électro-positif par rapport à ceux qui le suivent.

Bismuth du commerce en fil	+ 97
Bismuth pur en fil	89
Bismuth cristallisé, dans la direction de l'axe	65
Bismuth cristallisé, normalement à l'axe	45
Cobalt	22
Mercure	0,418
Plomb	0
Étain	— 0,1
Cuivre du commerce	— 0,1
Platine	— 0,9
Or	— 1,2
Antimoine en fil	— 2,8
Argent pur	— 3
Zinc pur	— 3,7
Cuivre précipité par galvanoplastie	— 3,8
Antimoine du commerce en fil	— 6
Arsenic	—13,36
Fer en fil	—17,15
Antimoine cristallisé, dans la direction de l'axe	—22,6
Antimoine cristallisé, normalement à l'axe	—26,4
Phosphore rouge	—29,7

L'unité adoptée dans ce tableau est le micro-volt qui correspond à $\frac{1}{1.000.000}$ de volt. Le volt, sur la définition duquel nous reviendrons, est égal à environ $\frac{1}{3.107}$ ou 0,000.322 unité électrostatique absolue de potentiel (nº 38). Un élément Daniell a pour force électromotrice 1,070 volt, ou 1.070.000 microvolts, ou 0,00035 unités électrostatiques absolues.

En réunissant un certain nombre de couples semblables, dont les soudures paires sont maintenues à une température fixe, tandis que les soudures impaires sont à une température différente, on forme une pile dont la force électromotrice est égale à la somme des forces électromotrices des divers éléments.

Un couple bismuth-antimoine, dont les indices par rapport au plomb (voir le tableau ci-dessus) sont + 97 et — 22,6, donne pour chaque degré de différence de température entre les soudures une force électromotrice égale à $97 + 22,6 = 119,6$ microvolts, ou $\frac{119,6}{1.070.000}$ élément Daniell. Pour une différence de température des soudures de 100° la force électromotrice serait $\frac{11.960}{1.070.000}$ ou 0,0111 d'élément Daniell. Il faudrait $\frac{1}{0,0111}$ ou 90 couples thermo-électriques semblables pour produire la force électromotrice d'un élément Daniell ordinaire.

En prenant le bismuth cristallisé et le cuivre qui correspondent aux chiffres 45 et — 0,1 du tableau, on a pour la force électromotrice 45,1 microvolts ou $\frac{45,1}{1.000.000}$ de volts pour chaque différence des températures des soudures de 1°, et 0,00451 volts pour une différence de 100°. $\frac{1,07}{0,00451}$ ou 237 couples donneraient une force électromotrice égale à celle d'un élément Daniell.

MM. J. Regnault, Ed. Becquerel et Gaugain, dans leurs expériences sur la force électromotrice des piles, ont employé pour former une échelle à peu près continue de force électromotrice des éléments thermo-électriques bismuth-cuivre dont les soudures étaient maintenues à 0 et 100 degrés centigrades ; les chiffres qu'ils donnent pour le nombre d'éléments thermo-électriques qui correspond à un élément Daniell sont un peu différents. La force électromotrice d'un élément Daniell serait, suivant M. Regnault, de 179 couples thermo-électriques, suivant M. Bec-

querel de 187 (*) et suivant M. Gaugain de 197 (**). Les différences entre ces nombres et le chiffre 237 donné plus haut s'expliquent facilement par l'influence de la qualité des métaux employés.

138. Les propriétés thermo-électriques des corps ont reçu diverses applications.

MM. Melloni et Nobili en ont tiré parti pour former des thermomètres d'une très-grande sensibilité, qui font connaître, par l'intensité du courant thermo-électrique, qu'on mesure au moyen d'un galvanomètre, la différence de température de deux soudures, dont l'une est exposée à une source calorifique, tandis que l'autre se trouve à la température ambiante. Leur pile comprend un grand nombre d'éléments réunis sous un petit volume; l'appareil doit être préalablement gradué par comparaison avec un thermomètre ordinaire. Dans le même ordre d'idées, MM. Becquerel, Pouillet, Peltier, etc., ont employé dans diverses recherches la pile thermo-électrique réduite à un seul élément en faisant varier sa forme suivant les conditions des expériences.

M. Gaugain, Ed. Becquerel et J. Regnault ont, au contraire, comme nous l'avons dit plus haut, utilisé les couples thermo-électriques pour avoir une échelle de force électromotrice presque continue.

Enfin on a songé à employer dans l'industrie les couples thermo-électriques et à les appliquer, par exemple, à la galvanoplastie et à la télégraphie. L'élément de M. Ed. Becquerel est formé de sulfure de cuivre et de maillechort dont une des soudures est maintenue à la température ordinaire tandis que l'autre est portée à 360° environ. La force électromotrice d'un élément est à

(*) *Cours de physique* de M. Jamin.
(**) *Annales télégraphiques*, numéro de novembre et décembre 1875.

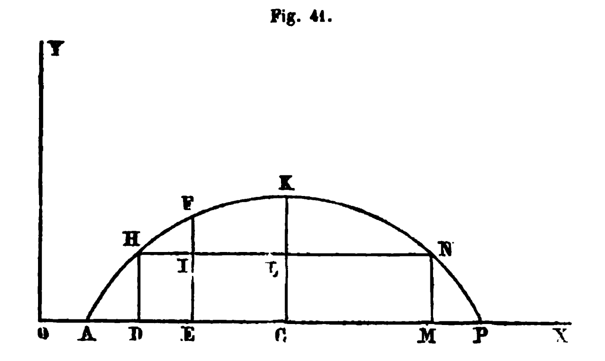
peu près un huitième de celle d'un élément Daniell ordinaire. La pile de MM. Mure et Clamond se compose d'éléments en fer et galène (sulfure de plomb) réunis de façon que les soudures paires puissent être chauffées au moyen d'un four à gaz. Cette pile, qui a été récemment perfectionnée par la substitution d'un alliage zinc-antimoine à la galène, est utilisée dans la galvanoplastie où l'on a besoin de piles peu résistantes n'ayant qu'une faible force électromotrice. Il est douteux qu'on puisse en faire usage en télégraphie, surtout sur les longues lignes aériennes pour lesquelles on a besoin d'une force électromotrice considérable; leur usage serait beaucoup plus dispendieux que celui des piles voltaïques ordinaires ou des machines électro-magnétiques.

139. La force électromotrice développée par les éléments thermo-électriques n'est proportionnelle à la différence de température des soudures que dans des limites assez restreintes au delà desquelles elle varie d'une façon assez irrégulière. Il arrive même, pour certains couples, que si l'on élève progressivement la température de l'une des soudures, en laissant constante celle de l'autre, le courant, après avoir augmenté d'intensité jusqu'à une certaine limite, atteint un maximum, puis diminue peu à peu et change de sens.

Ce phénomène d'inversion signalé d'abord, en 1823, par Cumming, a été étudié par plusieurs physiciens, et notamment par M. Gaugain, qui a publié dans les *Annales de physique et de chimie* (mai 1862) un travail intéressant sur les courants thermo-électriques, a construit les courbes qui représentent les pouvoirs thermo-électriques correspondant aux diverses températures pour un certain nombre de couples et a constaté le phénomène d'inversion pour plusieurs d'entre eux.

La *fig.* 41 montre la forme d'une de ces courbes. Les abscisses représentent les températures et les ordonnées, les forces électromotrices ou plutôt les différences entre la force électromotrice de contact due à la température de l'abscisse et celle qui correspond à la température de départ, OA, qui, dans les expériences de M. Gaugain, était de 20 degrés centigrades.

Fig. 41.



Pour deux températures OD et OE des soudures du couple thermo-électrique auquel se rapporte la figure, la force électromotrice développée est EF — DH = FI.

Si on laisse une des soudures à une température constante OD, et qu'on élève progressivement celle de l'autre soudure, la force électromotrice augmente d'abord, atteint un maximum égal à LK à la température OC, puis le courant diminue d'intensité, devient nul à la température OM, et change de signe pour des températures supérieures.

La température de la soudure chaude OM qui correspond au changement de sens du courant dépend naturellement de celle de l'autre soudure.

Quant à la température du maximum OC, qui constitue ce qu'on nomme le point *neutre*, elle est :

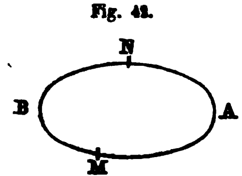
Pour l'élément	or-fer	140°
Id.	or-zinc	150
Id.	zinc-fer	198
Id.	argent-zinc	225
Id.	cuivre-fer	284

140. Les courants thermo-électriques, comme tous les courants, développent de la chaleur dans les circuits qu'ils traversent; ils peuvent produire des effets dynamiques ou chimiques et par conséquent un travail. Quelle est l'origine de ce travail ? La découverte de Peltier donne la réponse à cette question.

Quand un courant traverse un conducteur formé de deux substances différentes, la température de la soudure s'abaisse lorsque le courant est dirigé dans le même sens que le courant électrique qu'on obtiendrait en chauffant cette soudure, et s'échauffe au contraire lorsque le courant a une direction contraire.

Considérons un circuit électrique bismuth-antimoine B.A (*fig.* 42); si l'on chauffe la soudure N, il se développe un courant allant du bismuth à l'antimoine à travers la soudure chaude; cette soudure tend à se refroidir et absorbe de la chaleur si l'on maintient la température constante, tandis que la soudure M s'échauffe et par suite dégage de la chaleur.

Fig. 42.



La quantité de chaleur qui est abandonnée par la soudure N est équivalente à la chaleur qui se développe à la soudure M, augmentée de la chaleur développée par le courant dans le circuit et du travail qu'il peut produire.

Toutefois cette explication n'est pas suffisante, car elle ne peut s'appliquer au cas où se produit le phénomène de renversement du sens du courant, signalé plus haut,

qui a lieu dans certains couples lorsqu'on élève progressivement la température d'une des soudures en laissant l'autre constante.

Considérons par exemple le couple cuivre-fer et supposons qu'on laisse une des soudures à la température du point neutre 284°. Si l'autre soudure est à une température inférieure, le courant va du fer au cuivre à travers la soudure chaude, et l'on comprend que la chaleur de cette soudure, qui tend à se refroidir, puisse produire l'échauffement du circuit et celui de l'autre soudure. Mais si l'on élève graduellement la température de cette dernière de façon qu'elle dépasse 284°, le courant conserve la même direction ; la soudure dont la température, maintenue à 284°, n'a pas changé reste dans les mêmes conditions : elle devrait donc encore perdre de la chaleur qui se transmettrait aux parties plus échauffées du circuit, ce qui n'est pas possible. Il faut en conclure qu'à cette température de 284° le contact du fer et du cuivre ne donne lieu à aucune absorption et à aucun dégagement de chaleur, ou que les métaux sont, au point de vue thermo-électrique, *neutres* l'un par rapport à l'autre.

Si nous revenons au premier cas où l'une des soudures est à 284° et l'autre à une température inférieure, nous remarquerons qu'il se produit un courant électrique et par suite qu'une certaine quantité de chaleur est absorbée par la soudure froide et par l'échauffement du circuit. Quelle est l'origine de cette chaleur qui ne peut provenir de la soudure chaude ? M. Thomson l'attribue à un phénomène nouveau auquel il a donné le nom de *transport électrique de la chaleur* et qu'on peut énoncer ainsi : Lorsqu'un courant traverse un conducteur dont les divers points sont à des températures inégales, en

même temps qu'il produit un dégagement de chaleur proportionnel au carré de son intensité, il détermine une absorption ou un dégagement de chaleur qui est simplement proportionnel à l'intensité.

M. Thomson a vérifié directement par l'expérience l'exactitude de cette hypothèse. En faisant passer un courant à travers un conducteur artificiellement chauffé en son milieu et refroidi à ses extrémités de façon que dans une des moitiés du conducteur le courant aille de la partie froide à la partie chaude, et de la partie chaude à la partie froide dans l'autre, il a reconnu que les deux moitiés du conducteur s'échauffent inégalement sous l'action du courant, et que la différence de température change de signe avec la direction du mouvement électrique. Dans le fer, le courant tend à produire de la chaleur quand il passe d'un point froid à un point plus chaud, et à produire du froid lorsqu'il marche dans une direction contraire ; pour le cuivre, le résultat est inverse et notablement plus faible.

PHÉNOMÈNES ÉLECTRO CHIMIQUES.

141. *Action électrolytique des courants.* — Lorsqu'un courant électrique traverse un composé liquide, un des éléments ou groupes d'éléments se porte à l'électrode par laquelle entre le courant (électrode positive ou anode). Les autres éléments se portent à l'autre électrode (électrode négative ou cathode). Ces éléments se combinent avec les métaux qui forment les électrodes ou deviennent libres suivant qu'ils ont ou n'ont pas d'affinité pour ces métaux.

D'après la théorie de Grotthus, la transmission s'opère par une série de décompositions et recompositions suc-

cessives des molécules élémentaires du composé, ce qui explique pourquoi entre les deux électrodes on n'aperçoit aucune trace de décomposition.

Une petite partie du courant traverse les liquides sans produire d'action chimique, mais la quantité d'électricité ainsi transmise est négligeable, surtout lorsque le courant a une certaine intensité.

L'explication de Grotthus n'est pas suffisante pour rendre compte du phénomène de la décomposition électrolytique, car les atomes qui constituent une molécule étant unis par une force supérieure à l'attraction qui agit entre les atomes de deux molécules voisines, il ne devrait y avoir décomposition de molécules, et par suite transmission de l'électricité, que lorsque la force électrique atteint une certaine limite, et, lorsque cette limite est atteinte, un grand nombre de molécules devraient être simultanément décomposées; ces deux faits sont contraires à l'expérience, car le plus faible courant, en traversant un électrolyte, suffit pour produire sa décomposition, et la quantité qui est décomposée est proportionnelle à l'intensité du courant (*).

Ces considérations ont conduit M. Clausius à une théorie différente, qui a pour base une hypothèse sur la constitution des corps, introduite dans la science par Lesage, Bernouilli, Kronig, etc. D'après cette hypothèse les molécules des corps ne sont pas en repos; elles sont animées de mouvements rapides et leur force vive dépend à chaque instant de leur température. La nature du mouvement est différente suivant l'état des corps :

Pour les solides, les molécules sont animées seule-

(*) Il ne s'agit pas ici des forces qui agissent aux électrodes où se produit le phénomène de la polarisation, mais de la force qui agit à l'intérieur de l'électrolyte.

ment de mouvement vibratoires et ne peuvent abandonner leur position sans l'influence d'une action étrangère. A l'état liquide, les molécules n'ont pas une position d'équilibre déterminée ; elles peuvent tourner complétement autour de leur centre de gravité, et celui-ci peut sortir entièrement de sa position, mais l'effet de ce mouvement n'est pas assez fort pour vaincre l'attraction moléculaire et séparer entièrement les unes des autres les molécules qui sont maintenues par la pression extérieure dans les limites d'un certain volume. Enfin, à l'état gazeux, les molécules sont écartées les unes des autres et se trouvent en dehors des sphères d'attraction mutuelle ; elles se meuvent en ligne droite, d'après les lois ordinaires du mouvement, se choquent, réfléchissent lorsqu'elles se rencontrent, et, en frappant les parois des vases qui les renferment, produisent une pression qui n'est autre que la force élastique et dépend du nombre des molécules contenues dans un espace donné, ou de la densité, et de la vitesse des mouvements, qui augmente avec la température.

Dans les corps composés, les molécules sont formées d'atomes, ou molécules élémentaires, dont les uns sont électro-négatifs et les autres électro-positifs. Pour les liquides, ces atomes ne sont pas réunis d'une façon invariable ; ils se meuvent en passant d'une molécule à une autre ; chacun d'eux rendant libre dans ce passage un atome semblable qui décompose à son tour une autre molécule. Tous ces mouvements ont lieu irrégulièrement comme les mouvements de la chaleur qui les occasionnent.

Si un courant traverse un liquide composé, les molécules ne suivent plus entièrement des directions irrégulières et variables ; entre les mouvements des atomes,

tout irréguliers qu'ils sont encore, il y a une direction prédominante. Les molécules électro-positives se portent d'un côté et les molécules électro-négatives de l'autre.

Cette théorie explique d'une manière naturelle l'accroissement du pouvoir conducteur des liquides avec la température, puisque la rapidité plus grande des mouvements intérieurs doit contribuer à faciliter la décomposition des molécules. Elle explique également les mélanges des liquides et des gaz, et la réaction qui a lieu lorsque deux sels solubles mélangés peuvent donner lieu, par leur double décomposition, à un sel insoluble qui se précipite.

142. L'action électrolytique des courants est réglée par les lois de Faraday :

1° La quantité d'un électrolyte décomposée dans un intervalle de temps donné est proportionnelle à l'intensité du courant, ou, en d'autres termes, à la quantité d'électricité qui traverse le liquide.

2° Les poids des divers électrolytes décomposés par un même courant ou par des courants d'égale intensité sont proportionnels à leurs équivalents chimiques.

Pour l'eau et les oxydes métalliques, l'oxygène se porte à l'électrode positive, c'est l'élément électro-négatif; l'autre élément, hydrogène ou métal, dit électro-positif, se porte à l'autre électrode.

Les acides oxygénés, comme les acides sulfurique, phosphorique, etc., sont décomposés lorsqu'ils sont en dissolution très-concentrée ; l'oxygène se porte encore à l'électrode positive et le métalloïde à l'électrode négative.

Pour les composés binaires non oxygénés, tels que les acides chlorhydrique, bromhydrique, les chlorures,

iodures, bromures, sulfures, etc., l'hydrogène ou le métal se dépose à l'électrode négative, et le métalloïde, chlore, iode, brome, soufre, etc., à l'électrode positive. Les métalloïdes, chlore, brome, iode, soufre, etc., sont donc électro-positifs quand ils sont unis à l'oxygène, et électro-négatifs quand ils sont combinés avec des métaux.

Pour les sels neutres oxygénés et l'eau acidulée, qui se comporte comme un sel d'hydrogène, le métal se porte seul à l'électrode négative ; l'oxygène et l'acide se dégagent à l'autre électrode. A un équivalent du métal réduit correspond un équivalent d'oxygène et un équivalent d'acide.

Quant aux composés qui ne sont pas représentés par des nombres égaux d'équivalents, tels par exemple que le perchlorure de fer, Fe^2Cl^3, la décomposition est réglée par le métalloïde (Cl), c'est-à-dire que si ce corps est traversé par le courant en même temps que de l'eau acidulée renfermée dans un autre appareil de décomposition (voltamètre), il se dégage, pour un équivalent d'hydrogène ou d'oxygène mis en liberté dans ce dernier, un équivalent du métalloïde, Cl, et la quantité correspondante de l'autre corps, Fe, comme si la formule était $Fe^{\frac{2}{3}}Cl$ (*).

La décomposition électrolytique est d'ailleurs souvent accompagnée d'actions secondaires dues à l'action chimique des éléments qui se portent aux électrodes, soit que le métal qui se dépose à l'électrode négative étant très-oxydable décompose l'eau au sein de laquelle se passe le phénomène, soit que l'acide et l'oxygène qui se

(*) Cette loi, due à M. Éd. Becquerel, a été vérifiée pour un grand nombre de composés et paraît générale.

portent à l'électrode positive attaquent le métal qui forme cette électrode.

143. Lorsque le liquide traversé par le courant est un mélange de plusieurs dissolutions salines, tantôt un seul des sels est décomposé, tantôt ils le sont simultanément. L'action, dont les lois ne sont pas encore bien connues, dépend de la masse des électrolytes mélangés de leur conductibilité et de l'affinité chimique des corps qui constituent les sels. Si par exemple un courant traverse un mélange d'azotate d'argent et d'azotate de cuivre dissous dans l'eau, l'argent seul est précipité tant que le mélange ne contient pas au moins soixante équivalents d'azotate de cuivre pour un d'azotate d'argent; lorsque cette limite est dépassée, les deux sels sont simultanément décomposés.

C'est ce qui explique comment un sel dissous dans l'eau peut être décomposé sans que l'eau soit réduite, ou encore comment l'eau, qui est à peine conductrice lorsqu'elle est pure, est facilement décomposée lorsqu'on y verse un acide tel que l'acide sulfurique : le sel SO^3HO est probablement seul décomposé par le courant, l'hydrogène (H) se dégage à l'électrode négative et l'oxygène (O) se porte en même temps que l'acide sulfurique (SO^3) à l'électrode positive où ce dernier corps se combine avec l'eau de la dissolution pour reformer le sel SO^3HO.

Enfin lorsque deux sels traversés par le courant, au lieu d'être mélangés, sont placés dans deux compartiments séparés par une cloison poreuse, ils sont simultanément décomposés. Si B et A sont les deux éléments électro-positifs et électro-négatifs de l'un des sels (AB), B' et A' les éléments de l'autre sel (A'B') et si l'électrode positive plonge dans le premier, l'élément acide A se dé-

pose sur cet électrode, tandis que le métal B′ du second se porte à l'électrode négative. Il se forme au contact des deux liquides un nouveau sel A′B qui est à son tour décomposé, de sorte que le résultat final est le transport des éléments A et A′ à l'électrode positive et des éléments B et B′ à l'électrode négative, à moins que le sel A′B ne soit insoluble, auquel cas il se précipite.

144. ***Mesure de l'intensité des courants par leur action électrolytique.*** — La quantité d'un électrolyte qui est décomposée par un courant étant proportionnelle à la quantité d'électricité qui le traverse, on peut mesurer l'intensité des courants constants par le poids ou le volume des corps composés qu'ils réduisent dans un intervalle de temps déterminé.

On peut adopter, par exemple, pour unité d'intensité celle du courant qui, en traversant un voltamètre à eau acidulée, dégagerait en une minute à l'électrode négative 1 gramme d'hydrogène, qui correspond à 8 grammes d'oxygène dégagée à l'autre électrode, ou à 9 grammes d'eau décomposée. L'intensité d'un courant quelconque est alors donnée par le poids en grammes, P, d'hydrogène qu'il dégage, divisé par le nombre de minutes t, pendant lequel il a traversé le voltamètre, ou par $\frac{P}{t}$.

M. Jacobi, dans ses travaux sur l'électricité, a pris pour unité l'intensité du courant qui, en traversant de l'eau acidulée, dégage pendant une minute un centimètre cube du mélange oxygène hydrogène à la température de 0° et à la pression de 760 millimètres.

Pour un volume égal à V centimètres cubes, produit pendant un intervalle de temps égal à t minutes, à la température θ et à la pression H, l'intensité du courant

est

$$I = \frac{VH}{760(1 + \alpha\theta)t}.$$

α étant le coefficient de dilatation des gaz (environ $\frac{1}{273}$ ou 0,00366). Cette unité est environ 0,00006 de l'unité précédente (*).

En Allemagne, on emploie comme unité l'intensité du courant qui, en traversant un voltamètre à eau acidulée pendant vingt-quatre heures, dégagerait 1 gramme d'hydrogène; c'est le courant dit *atomique*. Pour les usages télégraphiques, cette unité étant trop grande, on en prend la millième partie qu'on nomme *milli-atome* (m. a.). Le courant nécessaire pour faire fonctionner un appareil Morse ordinaire à l'extrémité d'une longue ligne est d'environ 12 milli-atomes; on admet que l'intensité au départ doit être de 27 milli-atomes, en raison des pertes de courant sur les lignes. Pour faire marcher l'appareil Hughes, le courant à l'arrivée doit être égal à environ 10,6 milli-atomes (**).

L'intensité du courant atomique est égale à $\frac{1}{24 \times 60}$ ou $\frac{1}{1440}$ de celle du courant qui dégagerait 1 gramme d'hydrogène par minute et à 11,5 unités d'intensité de Jacobi.

On fait souvent usage pour la mesure de l'intensité des courants de voltamètres à sel métallique, dont les élec-

(*) 1 centimètre cube de mélange contient $0^{cc},66$ d'hydrogène et $0^{cc},33$ d'oxygène; le poids de $0^{cc},66$ d'hydrogène est de $0^{gr},00006$.

(**) L'intensité du courant nécessaire pour faire marcher un récepteur dépend naturellement du nombre de tours du fil de l'électro-aimant; les chiffres ci-dessus s'appliquent aux appareils ordinaires.

trodes sont des métaux de même nature que celui du sel et l'on choisit de préférence les sels d'argent ou de cuivre, dont les métaux sont sans action sur l'eau et ont un équivalent élevé (108 pour l'argent et 31,7 pour le cuivre), ce qui diminue les chances d'erreur. On déduit l'intensité du courant de l'accroissement de poids de l'électrode sur laquelle se dépose le métal, ou de la diminution de poids de l'autre électrode, et du temps pendant lequel le courant a passé.

Un courant qui dans un intervalle de temps égal à t minutes dans un voltamètre à métal d'argent dépose à l'électrode négative un poids d'argent égal à P grammes a la même intensité qu'un courant qui, dans le même temps, dégagerait $\frac{P}{108}$ grammes d'hydrogène dans un voltamètre à eau acidulée; ou qui dans l'unité de temps dégagerait $\frac{P}{108t}$ grammes d'hydrogène et $\frac{8P}{108t}$ grammes d'oxygène (*).

Lorsque le courant n'est pas constant, le poids ou le

(*) Voici la liste, par rapport à l'hydrogène, des équivalents chimiques des corps dont on a le plus souvent à faire usage dans l'étude de l'électricité :

Hydrogène	1	Platine	99,5
Oxygène	8	Plomb	103,5
Azote	14	Potassium	39
Carbone	6	Sodium	23
Chlore	35,5	Zinc	32,7
Soufre	16	Sulfate de cuivre $SO^3CuO + 5HO$	124,7
Argent	108	Sulfate d'oxydule de mercure (SO^3Hg^2O)	248
Chrome	26	Acide sulfurique (SO^3HO)	49
Cuivre	31,7	Chlorhydrate d'ammoniaque ($HCl.AzH^3$)	53,5
Fer	28		
Manganèse	27,6		
Mercure	100		
Or	98,5		

volume d'un électrolyte qu'il a décomposé donne la quantité totale d'électricité qui a passé, l'unité étant la quantité qui traverse un conducteur pendant l'unité de temps si l'intensité du courant est égale à l'unité.

145. Le rapport entre les unités électrostatiques et les unités électro-chimiques de quantité peut se déduire d'expériences faites par MM. Faraday, Becquerel et Buff; mais les nombres auxquels conduisent les résultats trouvés par ces trois physiciens sont un peu différents. Des expériences plus récentes de MM. Weber et Kolhrausch fixent ce rapport d'une manière plus précise.

Ainsi qu'on le verra, le rapport entre l'unité électro-magnétique absolue d'intensité et l'unité électrostatique est représenté par le rapport d'une longueur à un intervalle de temps, ou par une vitesse; le chiffre qui représente ce rapport est, d'après les expériences de MM. Weber et Kolhrausch, environ 310.740.000 mètres par seconde (*).

D'un autre côté, l'unité électro-magnétique absolue d'intensité, en adoptant pour unités fondamentales le mètre, la seconde et la masse du gramme, décompose en une seconde $0^{gr},0092$ d'eau.

Pour décomposer $0^{gr},0092$ d'eau, il faut donc un courant produit pendant une seconde par 310.740.000 unités électrostatiques d'intensité, ou, ce qui revient au même, il faut le passage de 310.740.000 unités électrostatiques de quantité. Pour décomposer un gramme d'eau, il faut $\frac{310.740.000}{0,0092} = 33.776.000.000$ unités de quantité; pour décomposer un équivalent ou 9 grammes

(*) Ce rapport, sur lequel nous reviendrons, est précisément égal à la vitesse de la lumière.

d'eau, 303.984.000.000 unités; pour décomposer 1 milligramme d'eau, 33.776.000 unités.

Si une batterie électrique était électrisée au potentiel 30 par une puissante machine électrique, dans les conditions indiquées au n° 98, pour que sa décharge pût décomposer 1 milligramme d'eau, elle devrait avoir une étendue de A mètres carrés telle que

$$\frac{A \times 30 \times 1,80}{4\pi \times 0,002} = 33.776.000, \quad \text{ou} \quad A = 15.700 \text{ mètres carrés.}$$

Pour décomposer 9 milligrammes ou un équivalent d'eau, l'étendue de la batterie devrait être de 141.300 mètres carrés. Les expériences de M. Faraday conduisent au chiffre 197.680^{mc}, celles de M. Becquerel au chiffre 180.570^{mc}, et celles de M. Buff au chiffre 113.700^{mc}. Les différences entre ces divers nombres s'expliquent par les conditions diverses dans lesquelles les expériences ont été faites et par le mode différent d'évaluation de la tension ou du potentiel.

Supposons une quantité d'électricité égale à celle qui produit la décomposition d'un milligramme d'eau en présence d'une quantité égale d'électricité contraire située à une distance égale à d mètres; ces deux quantités s'attireront avec une force égale à $\frac{(33.776.000)^2}{d^2}$ unités absolues de force ou environ $\frac{(33.776.000)^2}{d^2 \times 10}$ grammes, l'unité absolue de force étant environ $\frac{1}{10}$ du gramme (26), ou $\frac{(33.776.000)^2}{d^2 \times 10.000}$ kilogrammes. Si $d = 1.000$ mètres, cette force est égale à environ 114.000 kilogrammes.

Rappelons encore que M. Pouillet, dans ses expériences, a rapporté les phénomènes électro-chimiques aux phéno-

mènes thermo-électriques en prenant pour unité électrique la quantité d'électricité fournie en une minute par un couple thermo-électrique bismuth-cuivre dont les soudures sont maintenues à 0° et 100°, la résistance du circuit étant un fil de cuivre d'un millimètre de diamètre et de 20 mètres de longueur. La quantité nécessaire pour décomposer 1 gramme d'eau est égale à 13.787 de ces unités.

146. *Conductibilité des liquides.* — Lorsqu'un courant traverse un liquide, il éprouve une résistance qui est soumise aux mêmes lois que la résistance due aux corps solides, c'est-à-dire qu'elle est proportionnelle à la longueur du trajet parcouru par le fluide électrique en raison inverse de la section du liquide et d'un coefficient particulier à chacun d'eux, qui représente sa conductibilité, ou son pouvoir conducteur, ce qui n'a rien de contraire à la théorie de Clausius exposée plus haut.

La conductibilité des liquides, comparée à celle des métaux, est très-faible. Ainsi, celle de l'argent étant représentée par 1, celle d'une dissolution saturée de sulfate de cuivre à la température ordinaire est 0,000.005.4; celle d'une dissolution d'acide azotique à 36° est 0,000.093; celle d'une dissolution étendue d'acide sulfurique, environ 0,000.097; celle de l'eau pure 0,000.000.014.

La conductibilité des liquides augmente d'ailleurs à mesure que la température s'élève, ce qui s'explique facilement puisque les corps composés résistent d'autant moins à la décomposition que la température est plus élevée.

En se portant aux électrodes, les produits de la décomposition modifient les conditions du circuit et par suite sa résistance; cet effet se produit surtout lorsque les

produits sont des gaz sans action chimique sur les métaux qui forment ces électrodes, autour desquels ils s'accumulent peu à peu avant de se dégager sous forme de bulles.

La rapidité du dégagement en bulles est d'autant plus grande que l'intensité du courant, rapportée à l'unité de surface de l'électrode, est elle-même plus grande; elle augmente avec la rugosité de cette surface, ce qui explique l'influence du platine platiné qui, en facilitant le dégagement du gaz, tend à diminuer la résistance, tandis qu'au contraire, ainsi que l'a fait observer M. d'Alméida, l'amalgamation des électrodes, en rendant leur surface plus unie, a pour effet de maintenir les bulles adhérentes et d'accroître la résistance.

Enfin la nature des électrodes a une influence notable sur le dégagement des gaz, certains corps, comme le charbon, la mousse de platine, d'or, de nickel, etc., ayant la propriété de condenser les gaz à une haute pression (*).

147. *Polarisation des électrodes.* — En outre de la résistance opposée au passage du courant par les conducteurs liquides et les éléments qui se portent aux électrodes, il se développe, par le fait même de la décomposition, une force électromotrice de direction opposée à celle qui produit le courant, qui est due à ce que la réduction des corps composés entraîne une consommation d'énergie ou de chaleur employée à vaincre l'affinité chimique. Le développement de cette force électromotrice constitue le phénomène connu sous le nom de *polarisation*, nom qui vient de ce qu'après l'interruption

(*) D'après M. Raoult, la mousse de nickel, par exemple, condense l'hydrogène de façon à en absorber environ 165 fois son volume.

du courant principal les électrodes conservent, par suite des dépôts qui y sont accumulés, une polarité qui leur donne la faculté de produire un courant de direction contraire, courant qui dure jusqu'à ce que ces matières soient épuisées.

Il est aisé de se rendre compte du développement de cette force électromotrice :

Soit E la force électromotrice qui, en agissant sur un circuit de résistance R, produit un courant d'intensité I; la quantité de force vive qui est fournie par la source électrique pendant un intervalle de temps T, et qui est entièrement absorbée sous forme de chaleur par le conducteur, lorsqu'il est entièrement métallique, est IET. S'il se produit un travail ou une absorption de chaleur, ainsi que cela a lieu pendant les décompositions électrolytiques, la quantité IET doit être équivalente à la chaleur absorbée par le conducteur augmentée de la chaleur qui correspond au travail exécuté par le courant.

Le travail qui correspond à la chaleur absorbée par le conducteur est I^2RT (exprimée en calories, la chaleur absorbée est $\frac{I^2RT}{4.168.800}$, (n° 126), ou $\frac{I^2RT}{4.168,8}$ si l'on rapporte la calorie au gramme d'eau).

Quant à l'action chimique, elle est, d'après la loi de Faraday, proportionnelle à l'intensité du courant et au temps pendant lequel il traverse le liquide, et donne lieu à une absorption de chaleur dont l'équivalent en travail peut être représenté par HIT, H étant l'équivalent en travail de la chaleur absorbée par la décomposition de la quantité qui est décomposée dans l'unité de temps par un courant d'intensité égale à l'unité.

On a donc

$$IET = I^2RT + HIT,$$

ou

$$I = \frac{E - H}{R}.$$

La force électromotrice E est donc diminuée d'une quantité égale à H, ou, en d'autres termes, il se manifeste dans le circuit une force électromotrice contraire égale à H.

Le poids des divers corps qui sont réduits dans un temps donné par des courants d'égale intensité étant proportionnels à leurs équivalents chimiques, on peut déduire la force électromotrice de polarisation, H, d'un composé de la chaleur qu'il faut fournir pour décomposer un équivalent de ce composé, ou, ce qui revient au même, de la chaleur développée par la combinaison des équivalents des corps simples dont il est formé.

On a vu (n° 145) que pour décomposer un équivalent d'une substance quelconque (9 grammes d'eau par exemple), il faut le passage d'une quantité d'électricité qui, exprimée en unités électrostatiques, est égale à 303.984.000.000 unités. Un courant égal à l'unité d'intensité décompose donc dans une seconde $\frac{1}{303.984.000.000}$ d'équivalent.

Si ch_a représente la chaleur en calorie (rapportée au gramme d'eau) dégagée par la formation d'un équivalent d'un corps composé (*), la décomposition d'un équivalent de ce composé produira une absorption égale de chaleur, correspondant à $ch_a \times 4.168,80$ unités absolues de travail, et la décomposition de $\frac{1}{303.984.000.000}$

(*) Nous supposons les équivalents exprimés en grammes, celui de l'hydrogène étant 1 gramme, et nous prenons pour calorie la quantité de chaleur nécessaire pour élever de 1 degré centigrade 1 gramme d'eau, soit $\frac{1}{1000}$ de l'unité adoptée pour la calorie dans l'industrie et les applications mécaniques.

d'équivalent entraînera une absorption de travail égale à

$$\frac{Ch_a \times 4.168,8}{303.984.000.000}$$

ou à

$$\frac{Ch_a}{72.920.000},$$

et donnera lieu à une force électromotrice de polarisation représentée en unités électrostatiques absolues par ce même nombre.

Ainsi, par exemple, un équivalent de zinc (32,7 grammes) en s'unissant à l'oxygène pour former de l'oxyde de zinc, dégage une quantité de chaleur égale à 42.570 calories, et cet oxyde en s'unissant avec l'acide sulfurique hydraté dégage 12.304 calories, ce qui donne pour la chaleur totale développée 42.570 + 12.304 = 54.874 calories. Si donc un courant décompose, en la traversant, une dissolution de sulfate de zinc, il devra abandonner une quantité de chaleur égale à 54.874 calories par équivalent décomposé et il en résultera une force électromotrice de polarisation représentée en unités électrostatiques absolues par

$$\frac{54.874}{72.920.000} = 0,00075.$$

Un équivalent de cuivre ($31^{gr},7$), en s'unissant à l'oxygène, développe 21.651 calories et la combinaison de cet oxyde avec l'acide sulfurique en produit 7.721 ; la formation d'un équivalent de sulfate de cuivre dégage donc 29.372 calories, et par suite la force électromotrice de polarisation produite par la réduction du sulfate de cuivre est

$$\frac{29.372}{72.920.000} = 0,00040.$$

148. Un équivalent d'hydrogène (1 gramme), en se

combinant avec l'oxygène pour former de l'eau, dégage une quantité de chaleur égale à 34.462 calories, la force électromotrice de polarisation de l'eau devrait donc être en unités électrostatiques

$$\frac{34.462}{72.920.000}.$$

MM. Buff, Wheatstone, Bosscha ont mesuré directement cette force électromotrice de polarisation en la comparant à celle d'un élément Daniell et ont été conduits à des chiffres notablement différents. Ils ont, en effet, trouvé pour la chaleur absorbée dans un voltamètre par la décomposition d'un équivalent d'eau des chiffres variant de 54.623 à 59.175 calories, très-supérieurs au chiffre de 34.462 calories que donne la combinaison directe de l'hydrogène et de l'oxygène (*).

Cette différence tient à ce que, dans la décomposition de l'eau par le courant, les deux gaz, oxygène et hydrogène, qui se portent aux électrodes, ne sont pas à l'état neutre ou normal; l'hydrogène est à l'état naissant ou actif, l'oxygène est à l'état d'ozone, et sous cette forme les deux gaz jouissent de propriétés chimiques plus énergiques qu'à l'état neutre. Pour revenir à ce dernier état, les deux gaz abandonnent une certaine quantité de chaleur qui doit être égale à la différence entre les nombres trouvés par MM. Buff, Wheatstone et Bosscha et ceux que donne la combinaison directe des deux gaz.

Les gaz qui se portent aux électrodes reprennent peu à peu leur état normal, tantôt pendant qu'ils traversent les liquides en s'échappant sous forme de bulles, ce qui produit un dégagement local de chaleur; tantôt à la sur-

(*) Voir la théorie mécanique de la chaleur de Verdet.

face même des électrodes contre lesquelles ils sont condensés, ce qui tend à diminuer la force électromotrice de polarisation et par suite à augmenter l'intensité du courant. Ce second effet se produit d'autant plus que les gaz séjournent plus longtemps contre les électrodes, ce qui a lieu lorsque le courant est peu intense ou que les électrodes ont de grandes dimensions.

Certains corps, tels que le charbon, ont en outre la propriété d'activer la transformation de l'ozone en oxygène ordinaire et par suite leur emploi comme électrode, de même que celui de grandes surfaces diminue la polarisation, dont la limite inférieure est la force électromotrice qui correspond à la chaleur dégagée par la combinaison de l'oxygène et de l'hydrogène ordinaire.

Un effet du même genre se produit sans doute dans toutes les décompositions électrolytiques qui donnent lieu à un dégagement gazeux.

149. — Il se produit pendant l'électrolysation d'autres actions secondaires qui peuvent modifier la polarisation.

Ainsi les gaz qui se portent aux électrodes s'y accumulent et s'y condensent; cette condensation donne lieu à une absorption de chaleur qui se transforme en une force électromotrice et tend à diminuer la polarisation. C'est ce qui a lieu pour des électrodes en charbon, en mousse de platine, d'or, etc.

De plus, quels que soient les métaux qui forment les électrodes, il se produit presque toujours au début de l'électrolysation une légère action chimique entre ces métaux et l'oxygène qui s'y porte, ou tout au moins une forte adhérence qui donne lieu à un travail et tend à diminuer la polarisation; cette action diminue peu à peu à mesure que le courant persiste. C'est à cet effet et au dé-

gagement des bulles de gaz contre les électrodes qu'es due la décroissance rapide de l'intensité du courant qui traverse l'eau acidulée.

Il y a aussi à tenir compte de la pression extérieure à laquelle est soumis un électrolyte, qui entraîne une absorption ou un développement de travail suivant que les produits de la décomposition ont plus ou moins de volume que les électrodes et doit donner lieu à une force électromotrice opposée à celle qui détermine la décomposition ou de même sens. Quand les produits de la décomposition sont des gaz tels que l'oxygène ou l'hydrogène, auxquels la loi de Mariotte est applicable, le produit VP du volume par la pression est sensiblement constant; le travail absorbé par le dégagement d'une quantité donnée de gaz est donc constant, ainsi que la force électromotrice due à ce travail. C'est ce qui explique pourquoi il est à peu près impossible d'arrêter la décomposition électrolytique de l'eau en réduisant le volume destiné à recevoir les produits de la décomposition.

Enfin il est un autre genre de travail mécanique que peut produire le courant et qui doit donner lieu à une diminution ou à un accroissement de la force électromotrice principale : c'est le transport électrolytique d'un métal dans le sens vertical. Si un courant traverse un sel métallique, et si le sel est renfermé dans un tube vertical, il y a transport du métal de l'électrode inférieure à l'électrode supérieure ou réciproquement suivant le sens du courant. Le travail exécuté pour vaincre la pesanteur doit diminuer la force électromotrice dans le premier cas, et l'effet contraire doit l'augmenter dans le second ; ce travail correspond donc à une force électromotrice qui diminue ou augmente l'intensité du courant. C'est en effet ce que M. Colley a constaté par

l'expérience (*). Cette force électromotrice, qu'on peut calculer d'après les poids des équivalents des métaux, est extrêmement faible. Suivant M. Maxwell, elle serait seulement, pour une dissolution de sulfate de zinc, de 1 millionième de la force électromotrice d'un élément Daniell par pied anglais (par tiers de mètre).

150. Lorsque le courant qui produit la décomposition électrolytique cesse d'agir, les éléments qui se sont portés aux électrodes ne se recombinent que lentement; mais si, la source électrique étant enlevée, on forme un circuit qui comprenne l'électrolyte, il se produit un courant dit secondaire ou de polarisation qui dure jusqu'à ce que les dépôts accumulés aux électrodes aient disparu. On comprend d'ailleurs que ces dépôts puissent agir différemment sur la production de ce courant. Dans la décomposition de l'eau, par exemple, la polarisation est surtout due à l'hydrogène qui entoure l'électrode négative et ne change pas sensiblement si l'on remplace la lame positive qui a reçu l'oxygène par une autre lame, ce qui s'explique facilement puisque l'eau contient de l'oxygène en dissolution, qui se renouvelle au contact de l'air.

En interposant dans le circuit d'une pile ordinaire des appareils de décomposition, on peut obtenir des effets remarquables que Ritter a le premier signalés; ainsi quelques couples à grande surface et à lame de platine étant électrolysés par une faible pile ordinaire peuvent, après l'enlèvement de cette dernière, produire un courant capable de fondre des fils métalliques et des effets comparables à ceux qu'on obtient avec les bouteilles de Leyde.

(*) *Journal de physique*, août 1876, juin 1877.

Ces couples de polarisation peuvent d'ailleurs être disposés de façon à pouvoir être réunis en surface pendant l'action de la pile ordinaire, et en série lorsque cette dernière a été enlevée, ce qui permet d'obtenir des effets de tension.

M. Planté a notablement augmenté l'effet des piles de polarisation en remplaçant les électrodes en platine par des électrodes en plomb. Il se forme à l'électrode positive du peroxyde de plomb qui a une grande affinité pour l'hydrogène et se décompose rapidement en produisant un courant de polarisation lorsque le courant principal a cessé de passer et que le circuit secondaire est fermé.

M. Jacobi a essayé d'appliquer les courants de polarisation à la télégraphie pour produire automatiquement la décharge des longues lignes par l'envoi spontané d'un courant secondaire de sens opposé au courant principal et produit par le passage de ce dernier dans un appareil de polarisation; ce procédé n'a pas donné de résultats assez satisfaisants pour être adopté.

151. Supposons maintenant que l'une des électrodes soit attaquable par les produits de la décomposition électrolytique. Deux cas peuvent arriver: 1° le métal qui forme l'électrode est attaquable par les éléments qui s'y portent sous l'action du courant, et la combinaison donne lieu à un développement de force vive. 2° L'électrode, au contraire, a de l'affinité pour les éléments qui s'en éloignent. Le premier cas se présente par exemple si l'électrode étant un métal attaquable, tel que le zinc ou le fer, et le liquide décomposé de l'eau acidulée ou un sel métallique, l'oxygène et l'acide se portent à l'électrode; le second cas arrive si le courant a une direction contraire.

Dans le premier de ces deux cas, il se forme une com-

binaison chimique, mais la chaleur qu'elle produit, au lieu de se manifester localement, se développe dans le circuit et résulte d'une augmentation de l'intensité du courant; l'action chimique donne donc lieu à une force électromotrice qui s'ajoute à la force électromotrice principale et qu'il est facile d'évaluer.

Le travail ou la force vive qui correspond à la chaleur absorbée par le circuit, I^2RT, est équivalent au travail dû à la force électromotrice, E, qui agit sur le circuit, diminué du travail correspondant à la décomposition électrolytique, mais augmenté du travail équivalent à la chaleur due à l'action chimique qui s'effectue à l'électrode.

Le travail dû à la force électromotrice E pendant le temps T est IET, I étant l'intensité du courant; celui qui est absorbé par la décomposition de l'électrolyte dans le même intervalle de temps est HIT (n° 147) ; enfin si G représente l'équivalent en travail de la chaleur dégagée par la combinaison de l'électrode avec les éléments qui s'y portent dans l'unité de temps, pour un courant d'intensité égale à l'unité, le travail correspondant à l'intensité I pendant le temps T sera GIT; on a donc

$$I^2RT = EIT - HIT + GIT,$$

ou

$$I = \frac{E - H + G}{R}.$$

Passons au second cas, où le courant a une direction telle que le métal qui forme l'électrode a de l'affinité pour les éléments qui s'en éloignent, ce qui a lieu par exemple dans la décomposition de l'eau acidulée si l'électrode négative est en zinc, puisque l'hydrogène s'y dégage tandis que l'oxygène se porte à l'autre électrode, que

nous supposons sans action chimique. Il semble, *à priori*, que les choses devraient se passer comme si les deux électrodes étaient inattaquables; il n'en est pas ainsi, l'intensité est diminuée, et la diminution correspond à la présence d'une force électromotrice contraire, égale à celle qui augmenterait l'intensité si le courant avait une direction contraire.

Cet effet tient à ce que, pour vaincre l'affinité chimique et éloigner les uns des autres les éléments qui tendent à se combiner, il faut la consommation d'une quantité de travail correspondant à la chaleur que produirait la combinaison.

Lorsque les deux électrodes sont formées de métaux attaquables, les mêmes effets se produisent à l'un et à l'autre. Si le liquide décomposé est un sel dont le métal soit le même que celui qui forme les électrodes, la quantité de chaleur développée à l'une d'elles est égale à la quantité de chaleur absorbée à l'autre, et il ne se produit pas de polarisation. Le résultat final est le transport du métal d'une des électrodes à l'autre sans développement de force électromotrice.

152. *Piles voltaïques*. — Les piles voltaïques sont formées de couples ou éléments dont chacun comprend deux corps solides conducteurs séparés par un liquide ou par deux liquides qu'une cloison poreuse empêche de se mélanger, l'un des deux corps solides étant un métal attaquable par un des liquides qui entrent dans la composition des couples.

Lorsque le circuit est fermé, il est traversé par un courant électrique, en même temps qu'une action chimique se manifeste dans chacun des couples de la pile. Il se produit donc en certains points une différence de potentiel et de plus une consommation d'énergie qui

correspond à l'échauffement du conducteur, ainsi qu'au travail que peut développer le courant.

Un certain nombre de physiciens, revenant à l'idée de Volta, attribuent, ainsi que nous l'avons dit (n° 135), la différence de potentiel au simple contact des métaux qui unissent deux éléments différents, l'action chimique n'ayant, suivant eux, d'autre effet que celui d'entretenir la différence de potentiel par une dépense d'énergie (*). Cette manière de voir paraît difficilement admissible. En effet, le travail qui correspond à la chaleur développée pendant l'unité de temps dans le circuit, I^2R, est égal au travail correspondant à la chaleur que produit la combinaison chimique dans les divers éléments ou à nEI si n est leur nombre. La force électromotrice due à chaque élément, E, est donc égale à la chaleur que développerait la combinaison chimique dans cet élément si le courant avait une intensité égale à l'unité; elle dépend de l'affinité chimique des corps qui se combinent dans la pile, et le contact des métaux ne paraît y intervenir que d'une façon secondaire.

Il se produit sans doute au contact de deux métaux différents une différence de potentiel et par suite une force électromotrice caractérisée par le refroidissement ou l'échauffement de la soudure suivant le sens du courant (phénomène de Peltier), mais cette force est extrêmement faible et paraît négligeable dans les circuits voltaïques ordinaires.

Il se développe également une différence de potentiel au simple contact des métaux et des liquides, même lorsqu'il ne se produit aucune action chimique, au con-

(*) Suivant M. Fleeming Jenkin, par exemple, « la différence de potentiel est produite par le contact; mais le courant qu'elle entretient est dû à l'action chimique. » (*Traité de magnétisme et d'électricité.*)

tact de l'eau et du cuivre ou de l'argent, par exemple. Cette différence de potentiel est très-faible, elle peut correspondre soit à une absorption de chaleur comme dans le cas des deux métaux, soit, plus probablement, à l'action chimique qui tend à s'exercer entre le métal et l'un des éléments du liquide, alors même qu'aucune combinaison ne se forme.

153. Lorsqu'un métal ayant une grande affinité pour l'oxygène, comme le potassium, le sodium, est mis en contact avec l'eau, il la décompose instantanément en développant de la chaleur sans qu'il y ait apparence de production d'un courant électrique; mais si le métal a une affinité moins grande, comme le zinc, le fer, etc., la combinaison n'a lieu qu'à la condition de produire un courant électrique, et la chaleur qu'elle produit se développe dans le circuit.

Ce circuit peut d'ailleurs être complétement local, ce qui arrive si, le métal n'étant pas homogène, il se trouve à sa surface des particules étrangères qui ont des affinités moindres pour l'oxygène. C'est ce qui a lieu, par exemple lorsque le zinc ordinaire plonge dans une dissolution d'acide sulfurique; la décomposition de l'eau acidulée s'opère spontanément, et les bulles d'hydrogène se dégagent aux points de la surface du zinc où se trouvent quelques parcelles de matière étrangère.

Lorsque la surface est polie, les bulles d'hydrogène sont adhérentes; elles interceptent la communication, arrêtent les courants locaux et empêchent le zinc de se consommer en pure perte dans l'élément lui-même. On réalise cet effet en amalgamant le zinc par une immersion dans le mercure.

Si le liquide en contact avec le zinc, au lieu d'être de l'eau acidulée, est un sel métallique tel que le sulfate de

cuivre, ce dernier métal se dépose aux points du zinc où l'action chimique est moindre, et il se forme des couples locaux qui entraînent la réduction rapide du sel : aussi dans les piles où l'on fait usage d'un sel métallique soluble l'amalgamation est-elle inutile, mais on doit empêcher le sel d'arriver au contact du zinc par l'interposition d'une cloison poreuse.

154. *Force électromotrice des piles.* — La chaleur qui se développe dans un circuit pendant un intervalle de temps T est l'équivalent de la quantité de travail I^2RT ou IET, E étant la force électromotrice absolue de la pile, I l'intensité de courant et R la résistance du circuit.

Cette chaleur correspond à une perte égale de la chaleur due à l'action chimique de la pile, et est rigoureusement égale à toute la chaleur que produit la combinaison, s'il ne se produit pas d'échauffement aux points où a lieu l'action chimique. C'est ce qui a lieu dans les piles usuelles où le corps attaquable est du zinc, du fer, du cadmium ou un autre métal de cette catégorie.

On peut dans ce cas déduire la force électromotrice de la chaleur développée par la combinaison, lorsqu'elle est connue par des expériences calorimétriques, ou réciproquement.

Soit A la chaleur qui serait développée par la combinaison d'un équivalent (en grammes) des substances qui composent la pile ; l'équivalent en travail de cette chaleur est

$$A \times 4168,8.$$

Pour un courant ayant l'unité électrostatique absolue d'intensité, la fraction d'équivalent qui se combine dans la pile pendant l'unité de temps est $\frac{1}{303.984.000.000}$

et elle développe une chaleur dont l'équivalent en travail est

$$\frac{A \times 4168{,}8}{303.984.000.000}$$

ou

$$\frac{A}{72.920.000}.$$

Cette quantité représente la force électromotrice exprimée en unités électrostatiques absolues.

Pile zinc, acide sulfurique et cuivre. — Dans cette pile, le zinc décompose l'eau et s'unit à l'oxygène ; quant à l'hydrogène, il se dégage sur la lame de cuivre. La force électromotrice correspond donc à la chaleur dégagée par la formation du sulfate de zinc, diminuée de celle qui est absorbée par la décomposition de l'eau.

La chaleur dégagée par la formation d'un équivalent de sulfate de zinc est égale à 54.874 calories ; celle qui est absorbée par la décomposition de l'eau est 34.462 ; la force électromotrice est donc, en unités électrostatiques absolues :

$$\frac{54.874 - 34.462}{72.920.000} = \frac{20.412}{72.920.000} = 0{,}00028.$$

Quant à la résistance de l'élément, elle dépend de ses dimensions ; elle augmente rapidement à mesure que le courant se produit par suite des bulles qui se dégagent sur la plaque de cuivre, et y adhèrent d'autant plus que l'intensité rapportée à l'unité de surface est plus grande, et par conséquent d'autant plus que la plaque est plus petite.

L'amalgamation de la lame de zinc, outre qu'elle rend l'action plus régulière en empêchant les courants locaux de se produire, augmente un peu la force électromotrice.

Ce fait tient, ainsi que l'a fait observer M. Jules Regnault, à ce que l'amalgamation du zinc produit une absorption de chaleur et que la réduction de l'amalgame doit développer de la chaleur qui se manifeste dans le circuit par un accroissement d'intensité de courant (*).

Pile Daniell. — Dans la pile Daniell, le zinc se substitue au cuivre du sulfate de cuivre; la force électromotrice est donc due à la chaleur produite par la formation du sulfate de zinc diminuée de celle qui est due à la réduction du sulfate de cuivre. La première action donne, pour un équivalent de sulfate de zinc formé, une quantité de chaleur égale à 54.874 calories. La seconde absorbe une quantité de chaleur égale à celle que produit la transformation d'un équivalent de cuivre en sulfate de cuivre, qui est de 29.372 calories; la chaleur développée dans l'élément est donc pour un équivalent de zinc dissous :

$$54.874 - 29.372 = 25.502 \text{ calories}$$

et la force électromotrice de l'élément est :

$$\frac{25.502}{72.920.000} = 0{,}00035 \text{ (**)}.$$

Pile de Grove et de Bunsen. — Dans cette pile il se produit plusieurs actions : transformation du zinc en sulfate de zinc qui, par équivalent consommé, produit une quantité de chaleur égale à 54.874 ca-

(*) L'amalgamation de certains métaux, du cadmium, par exemple, produit au contraire un dégagement de chaleur et par suite diminue la force électromotrice des couples dont ces métaux forment l'élément électro-négatif.

(**) Au nº 93 nous avons indiqué, d'après M. Thomson, 0,000374 comme représentant en unités électrostatiques absolues la force électromotrice d'un élément Daniell, chiffre trouvé par des expériences électrostatiques directes.

lories, décomposition de l'eau au contact du zinc et sa reconstitution aux dépens de l'oxygène de l'acide azotique, qui produisent des effets égaux et contraires dont il est inutile de tenir compte, enfin réduction de l'acide azotique, AzO^5, qui abandonne une partie de son oxygène et se transforme partie en bioxyde d'azote AzO^2 et partie en acide azoteux AzO^3. La quantité de chaleur absorbée par la première de ces transformations est de 6.885 calories par équivalent, et la chaleur absorbée par la seconde est de 13.634 calories.

La chaleur totale dégagée par la réduction d'un équivalent de zinc dans les piles Grove et Bunsen est donc comprise entre les nombres

$$54.874 - 6.885 = 47.989 \text{ calories}$$

et

$$54.874 - 13.634 = 41.240 \text{ calories.}$$

La force électromotrice de ces piles est donc comprise entre

$$\frac{47.983}{72.920.000} \text{ et } \frac{41.240}{72.920.000},$$

ou entre 0,00063 et 0,00054.

En fait on trouve un nombre intermédiaire entre les deux et qui correspond à une chaleur développée égale à environ 45.350 pour l'élément Grove, à 44.300 pour l'élément Bunsen.

Nous n'insisterons pas davantage ici sur les forces électromotrices des diverses piles; nous nous bornerons à rappeler l'explication donnée par M. Favre du fait qu'un élément à acide sulfurique et un élément Daniell ne peuvent produire la décomposition de l'eau, tandis que cette décomposition peut être obtenue à l'aide d'un élément Bunsen. Cet effet tient à ce que la décomposition

d'un équivalent d'eau entraîne l'absorption d'une quantité de chaleur égale à 34.462 unités de chaleur, alors que la chaleur dégagée par la dissolution d'un équivalent de zinc est seulement de 18.796 pour la pile acide sulfurique et 23.653 pour la pile Daniell. Pour les piles de Grove et de Bunsen la chaleur fournie par la pile peut varier, par équivalent, de 41.240 à 47.980; une partie de cette chaleur peut donc décomposer l'eau, alors que l'autre partie produit l'échauffement du conducteur.

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES ET UNITÉS ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

155. *Actions électro-dynamiques.* — Les courants exercent les uns sur les autres des actions mécaniques dont les lois ont été découvertes par Ampère. Ces lois se résument dans la formule suivante qui donne la force f avec laquelle s'attirent deux éléments infiniment petits de courant, ds et ds', suivant la droite qui joint leurs centres :

$$f = \frac{Kii'dsds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right), \qquad (1)$$

i et i' étant les intensités des deux courants qui parcourent les éléments ds et ds' ; r la distance de leurs centres, ω l'angle que forment entre eux ces deux éléments, α et α' les angles qu'ils forment l'un avec la droite qui les réunit, l'autre avec son prolongement, et K une constante positive qui dépend des unités adoptées. La force f est attractive lorsque la valeur de f est positive, et répulsive lorsque cette valeur est négative (*).

(*) La formule peut aussi se mettre sous la forme

$$f = \frac{Kii'\,ds\,ds'}{r^2}\left(\sin\alpha\sin\alpha'\cos\theta - \frac{1}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right),$$

θ étant l'angle que forment entre eux les deux plans menés par les deux éléments et la ligne qui joint leur centre.

Cette formule n'est directement applicable que dans le cas où l'on considère deux portions de courant ds et ds' très-petites par rapport à la distance, r, qui les sépare; mais on peut en déduire l'action de deux courants quelconques l'un sur l'autre en calculant la somme, ou l'intégrale, des actions exercées par les éléments de l'un des courants sur les éléments du second. L'action résultante est soit une force unique, soit un couple.

L'expression qui représente l'action d'une portion de courant sur une autre comprend deux facteurs; l'un, Kii', est constant pour des courants de même intensité; quant à l'autre, qui est la somme des termes $\frac{ds\,ds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right)$, il est numérique et indépendant des unités adoptées, puisque le rapport $\frac{ds\,ds'}{r^2}$ d'un produit de deux lignes à un carré est indépendant de l'unité de longueur.

Si l'on désigne par A la quantité numérique qui correspond à cette intégrale et par F la force résultante, lorsque l'action se réduit à une force unique, on a :

$$F = Kii'A.$$

Jusqu'ici nous avons adopté pour unité de quantité d'électricité la quantité qui repousse une quantité égale située à l'unité de distance avec l'unité de force (n° 34). L'unité d'intensité qui s'en déduit est alors l'intensité du courant produit par l'unité de quantité qui s'écoule à travers un conducteur pendant l'unité de temps.

Cette unité étant fixée, la valeur du coefficient K est déterminée et peut être trouvée par l'expérience. On peut en effet calculer l'intégrale A pour deux portions de courant et en déduire le produit $ii'A$; en mesurant par l'ex-

périence la force absolue F à laquelle est soumise l'un des courants lorsque l'autre est fixe, on a :

$$K = \frac{F}{i'i''A}.$$

La valeur du coefficient K dépend des unités fondamentales adoptées; les dimensions de l'unité d'intensité i du courant sont en effet (n° 102) $\frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$, celles de l'unité de force F sont $\frac{M}{T^2}$, A est d'ailleurs un coefficient numérique; il en résulte, pour les dimensions de K,

$$K = \frac{T^2}{L^2} \quad \text{ou} \quad K = \frac{1}{\frac{L^2}{T^2}}.$$

ou l'inverse du carré d'une vitesse. Nous reviendrons plus tard sur la valeur de cette vitesse.

156. *Unités électro-dynamiques.* — Au lieu de prendre pour point de départ des unités électriques les phénomènes électrostatiques, on peut adopter pour unité celle de l'intensité du courant et la déduire de la loi d'Ampère en faisant $K = 1$ dans la formule (1), qui devient alors

$$f = \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right).$$

Il suffit, pour avoir la grandeur de l'unité d'intensité, de chercher par l'expérience la force avec laquelle s'attirent ou se repoussent deux portions de courant dont le rapport des intensités est connu et dont les circuits sont tels qu'on puisse intégrer l'expression $\frac{dsds'}{r^2}$ (cos ω —

$\frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'$) pour les parties qui sont mobiles (*).

Le cas le plus simple est celui de deux courants rectilignes parallèles; s'ils vont dans le même sens, on a : $\omega = 0°$, $\cos\omega = 1$, et la formule devient:

$$f = \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(1 - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right).$$

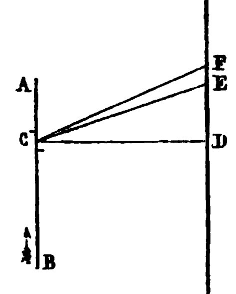


Fig 43.

Cette expression est directement intégrable lorsqu'on suppose l'un des courants d'une longueur indéfinie, ou du moins assez grande pour que ses extrémités n'aient pas d'influence sensible sur l'autre courant.

Soient (*fig.* 43) l la longueur du courant fini AB, dont l'intensité est i, $d = CD$ la distance des deux courants, i' l'intensité du courant indéfini MN; la force, f, avec laquelle ils s'attirent l'un l'autre a pour expression

$$f = \frac{ii'l}{d}\ (**).$$

Si l'on suppose $f = 1$, $d = l$, et $i = i'$, on en tire $i = 1$.

Ce qui permet de définir dans le système électro-dynamique l'in-

(*) On sait comment on peut rendre une partie d'un circuit mobile au moyen de l'appareil d'Ampère, ou de flotteurs.

(**) Cette loi, qui a d'abord été trouvée par l'expérience, est une de celles qui ont servi à Ampère pour établir la loi élémentaire de l'action de

tensité du courant, comme étant « l'intensité du courant rectiligne, qui serait attiré avec l'unité de force par un courant indéfini parallèle, situé à une distance égale à sa propre longueur (*). »

La formule $f=\frac{i^2l}{d}$, d'où l'on tire $i=\sqrt{\frac{df}{l}}$, pourrait servir à mesurer l'intensité d'un courant en unités électro-

deux éléments de courant. Si l'on adopte au contraire la loi élémentaire, on peut en déduire la formule $f=\frac{ii'l}{d}$.

La composante, suivant une perpendiculaire CD aux deux courants, de l'action exercée par un élément EF du courant indéfini, sur l'élément $C=ds$ du courant fini est, en effet,

$$\frac{ii'ds\times EF}{\overline{CF}^2}\left(1-\frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right)\cos ECD,$$

en désignant par ω l'angle ECD et remarquant que $\alpha=\alpha'=ECA=90-\omega$ que $CE=\frac{CD}{\cos\omega}=\frac{d}{\cos\omega}$, et que $EF=\frac{CE\sin FCE}{\sin CFE}=\frac{d\times d\omega}{\cos^2\omega}$, la composante de la force attractive devient

$$\frac{ii'ds}{d}\left(1-\frac{3}{2}\sin^2\omega\right)\cos\omega d\omega,$$

dont l'intégrale générale est

$$\frac{ii'ds}{d}\left(\sin\omega-\frac{1}{2}\sin^3\omega\right).$$

On a l'action de la partie DM du circuit indéfini sur l'élément ds en prenant la différence des valeurs obtenues en faisant $\omega=0$ et $\omega=90°$, ce qui donne $\frac{ii'ds}{2d}$.

La partie inférieure DN du courant indéfini produit une composante horizontale égale; l'action totale du courant MN sur l'élément ds est donc $\frac{ii'ds}{d}$.

Tous les éléments du courant AB sont soumis à une force semblable, parallèle à la ligne CD; la force totale est donc $\frac{ii'l}{d}$.

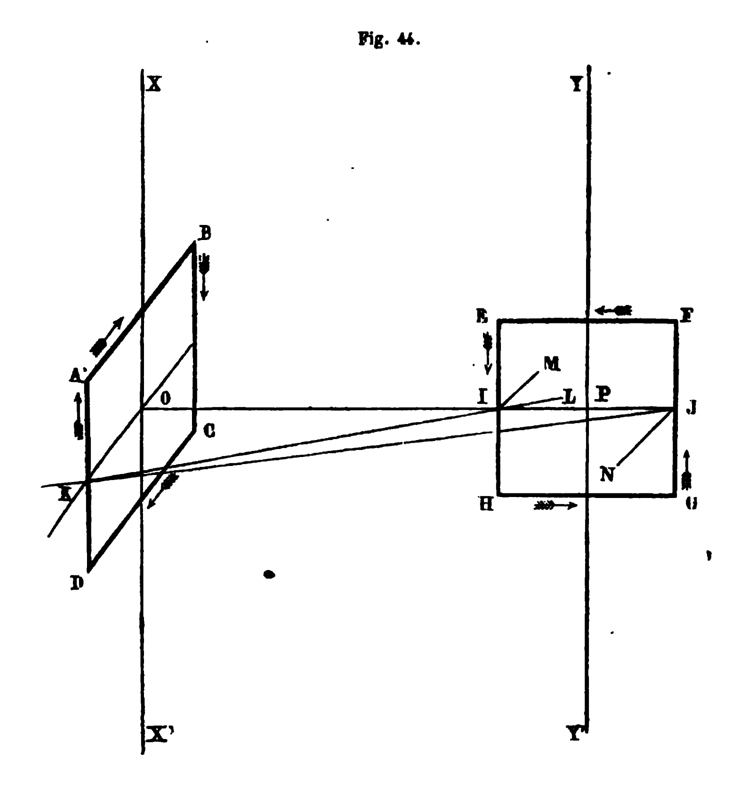
(*) La définition qu'on donne quelquefois de l'unité absolue d'intensité de courant, « le courant qui, circulant dans un fil droit de l'unité de longueur, attire un courant semblable situé à une distance égale », n'est donc pas exacte dans le système électro-dynamique, elle l'est encore moins dans le système électro-magnétique.

dynamiques, et à déterminer l'unité électro-dynamique d'intensité, mais l'expérience serait difficilement réalisable, car la force avec laquelle s'attirent deux courants est extrêmement faible et ne pourrait être facilement multipliée avec des conducteurs de forme rectiligne.

157. On arrive à un résultat plus pratique en considérant l'action de deux courants fermés d'une dimension très-petite par rapport à leur distance, et pour simplifier nous supposerons deux courants rectangulaires ou même carrés, ce qui rend les calculs plus simples.

Soient deux circuits carrés ABCD et EFGH (*fig. 44*),

Fig. 44.



situés à une assez grande distance l'un de l'autre, traversés par deux courants dont les sens sont indiqués par des flèches et dont les intensités sont i et i', soient a et b les côtés AB et EF de ces carrés, dont les surfaces sont a^2 et b^2, et D la distance des centres, OP.

Supposons ces deux circuits dans des plans perpendiculaires l'un à l'autre, le centre P du second se trouvant sur une normale au plan du premier conducteur élevée au centre O de ce dernier.

Le premier circuit étant fixe, et le second mobile autour de la ligne verticale YY' qui passe par son centre, ce dernier est soumis à un couple de rotation qu'on peut calculer en cherchant l'action des côtés verticaux AD et BC sur les côtés EH et FG, les autres actions étant nulles ou détruites par la résistance de l'axe de rotation.

La grandeur des côtés a et b étant supposée très-petite par rapport à la distance des deux circuits, on peut appliquer directement la formule d'Ampère.

Le côté AD repousse EH dans la direction IL avec une force égale à $\frac{abii'}{\overline{KI}^2}$; la composante suivant la normale IM au plan EFGH est :

$$\frac{abii'}{\overline{KI}^2} \cos \text{LIM} = \frac{abii'}{\overline{KI}^2} \sin \text{OIK} = \frac{a^2bii'}{2\overline{KI}^3}.$$

BC produit sur EH une force attractive, dont la composante suivant IM est égale à la précédente. La somme de ces deux composantes est

$$\frac{a^2bii'}{\overline{KI}^3},$$

et le moment de cette force par rapport à l'axe de rota-

tion YY', égale à son produit par $\frac{b}{2}$,

$$\frac{a^2b^2ii'}{2\overline{KI}^3}.$$

En J il se produit, suivant JN, une force de direction contraire à IM qui donne lieu à un couple de rotation agissant dans le même sens que le précédent et égal à

$$\frac{a^2b^2ii'}{2\overline{KI}^3}.$$

Le moment total de rotation, M, est

$$M = \frac{a^2b^2ii'}{2}\left(\frac{1}{\overline{KI}^3} + \frac{1}{\overline{KJ}^3}\right),$$

ou, en remarquant qu'en raison de l'éloignement des deux courants par rapport à leurs dimensions, on peut poser $KI = KJ = OP = D$,

$$M = \frac{a^2b^2ii'}{D^3} \text{ (*)}.$$

La même formule s'applique à des courants fermés quelconques, disposés comme les courants rectangulaires représentés dans la figure, à deux courants circulaires, par exemple ; si S et S' sont les surfaces des deux cercles,

(*) On arriverait d'une manière plus rigoureuse au résultat en remplaçant

$$KI \text{ par } \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(D - \frac{b}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

$$KJ \text{ par } \left[\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(D + \frac{b}{2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}},$$

en faisant le développement de l'expression et en négligeant les termes qui contiennent le rapport $\frac{a}{D}$ ou $\frac{b}{D}$ à une puissance supérieure à la troisième.

le moment de rotation du courant mobile est

$$M = \frac{SS'ii'}{D^3}.$$

Si l'on suppose $S = S' = 1$, $i = i'$ et $M = \frac{1}{D^3}$ on a $i = 1$.

On peut donc dire que « l'unité électro-dynamique d'intensité est celle d'un courant qui, traversant deux conducteurs circulaires de surface égale à l'unité, placés dans des plans normaux à une grande distance l'un de l'autre, de façon que le centre du premier se trouve sur une normale élevée au centre du second, développerait sur le premier circuit un couple de rotation dont le moment serait égal à l'unité divisée par le cube de la distance des deux centres ».

Cette définition a été donnée par Weber.

L'action du second conducteur, EFGH, sur le premier ABCD, est différente. Elle comprend, en premier lieu, l'action des côtés EH et FG sur AB et CD, qui produit un moment de rotation égal à $\frac{2a^2b^2ii'}{D^3}$, et, en outre, celle des côtés EF et GH, qui donnent lieu à un moment de sens contraire au précédent égal à $\frac{3a^2b^2ii'}{2D^3}$, de sorte que l'action résultante est un moment de rotation de ABCD autour de l'axe XX', dont la valeur est $\frac{a^2b^2ii'}{2D^3}$, ou plus généralement $\frac{SS'ii'}{2D^3}$, si S et S' sont les surfaces enveloppées par les deux courants.

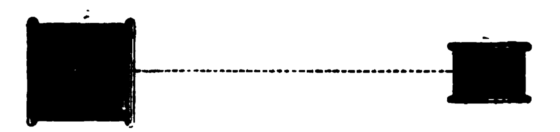
Ce moment est moitié moindre que celui auquel est soumis le circuit EFGH.

158. On peut, en appliquant ces formules, déterminer

directement par l'expérience l'intensité du courant en unités électro-magnétiques.

Au lieu de deux conducteurs rectangulaires ou circulaires dont l'action serait très-faible, considérons deux bobines de fil recouvert de soie, B et P (*fig.* 45), dont les

Fig. 45.



axes se coupent à angle droit et qui sont placées de telle façon que le centre de la seconde, P, se trouve sur l'axe de la première et à une assez grande distance. L'action de la bobine B sur la bobine P produit un couple de rotation égal à

$$\frac{nn'SS'ii'}{D^3};$$

n et n' étant les nombres de tours du fil des deux bobines, S et S' les surfaces moyennes des spires, et D la distance des centres des bobines.

On suspend la bobine P au moyen de deux fils métalliques écartés l'un de l'autre qui lui permettent de tourner en opposant une certaine résistance au mouvement (*) ; le courant qui arrive et sort par les deux fils de suspension est le même que celui qui traverse la bobine fixe B, de sorte que le couple dû à l'action électrodynamique est

$$\frac{nn'SS'i^2}{D^3}.$$

La bobine P, orientée préalablement dans la direction

(*) Ce genre de suspension, dit bifilaire, a été imaginé par Gauss et appliqué par lui aux magnétomètres.

de l'aiguille aimantée, dévie sous l'influence du courant et prend une position d'équilibre sous cette action, combinée avec celle du magnétisme terrestre et la torsion des deux fils de suspension.

On peut éliminer l'action du magnétisme terrestre, qui est d'ailleurs très-faible, en faisant passer le courant alternativement dans les deux sens et en prenant la moyenne des observations, ou en faisant tourner l'axe qui supporte les deux fils de suspension de façon à ramener la bobine à sa position première.

Le moment dû aux deux fils de suspension est, ainsi que Gauss l'a démontré, égal à $\Delta \sin u$, u étant l'angle de déviation, Δ une constante qui a pour valeur $\frac{ab}{l} \times \frac{P}{g}$, a et b représentant les espacements des deux fils aux points de suspension et à la bobine, qui peuvent être égaux, par l leur longueur et par $\frac{P}{g}$ la masse de la bobine mobile, égale à son poids P divisé par l'intensité g de la pesanteur. La constante Δ peut d'ailleurs se déterminer expérimentalement par la méthode des oscillations.

Quant à l'action électro-dynamique, si la bobine a été ramenée à sa position initiale, elle est $\frac{nn'SS'i^2}{D^3}$; on a donc

$$\frac{nn'SSi^2}{D^3} = \Delta \sin u$$

ou

$$i = \sqrt{\frac{\Delta D^3 \sin u}{nn'SS'}}.$$

On se dispense ordinairement de ramener la bobine mobile à sa position initiale, et l'on se borne à observer sa déviation par le déplacement d'un point lumineux

réfléchi par un petit miroir collé sur les spires du noyau.

En supposant que l'action électro-dynamique reste constante, ce qui peut être admis pour de faibles déviations, et en ne tenant pas compte de l'action de la terre, on a pour le couple qui tend à faire tourner la bobine, lorsque la déviation est v,

$$\frac{nn'SS'i^2 \cos v}{D^3},$$

ce qui donne pour la position d'équilibre

$$\frac{nn'SS'i^2 \cos v}{D^3} = \Delta \sin v,$$

ou

$$i = \sqrt{\frac{\Delta D^3 \operatorname{tg} v}{nn'SS'}},$$

équation qui fait connaître la valeur de l'intensité i en unités électro-dynamiques absolues.

159. *Dimensions des unités électro-dynamiques.* — Ainsi qu'on l'a vu, l'unité électro-dynamique d'intensité se déduit de la formule

$$f = \frac{ii'dsds'}{r^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right),$$

dont l'intégrale, pour deux portions finies de courants, peut se mettre sous la forme

$$F = ii'A;$$

F étant une force et A un coefficient numérique qui dépend de la forme et de la situation des courants. La formule devient

$$F = i^2A$$

lorsque les deux courants ont la même intensité, ou

$$F = i^2$$

si les deux courants sont rectilignes, parallèles, et si l'un d'eux étant indéfini, l'autre en est éloigné d'une distance égale à sa propre longueur. On obtient l'unité d'intensité lorsque $F = 1$.

Quant aux dimensions de cette unité, I_d, elles se déduisent de l'équation $F = i^2$, ou $F = I_d^2$, si F est l'unité de force. En remplaçant F par son expression en fonction des unités fondamentales, $F = \frac{ML}{T^2}$, on a

$$I_d = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

La quantité q d'électricité qui traverse un conducteur est égale au produit de l'intensité du courant, i, qu'elle produit par le temps t pendant lequel dure le courant, $q = it$; en supposant $i = 1$ et $t = 1$, on a l'unité de quantité, Q_d, dont les dimensions sont données par l'équation

$$Q_d = I_d T,$$

ou

$$Q_d = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}.$$

Les dimensions de l'unité de quantité sont indépendantes de l'unité de temps.

Quant à la résistance, elle se déduit de la loi de Joule

$$w = i^2 rt,$$

dans laquelle w est la quantité de travail, ou de chaleur équivalente, développée pendant le temps t par un courant dont l'intensité est i, dans un circuit dont la résistance est r.

Si dans cette équation on suppose $w = 1$, $i = 1$ et $t = 1$, on a $r = 1$, ce qui permet de définir l'unité de résistance. C'est celle d'un conducteur qui, parcouru pendant l'unité de temps par un courant d'intensité égale

à l'unité, absorberait une quantité de chaleur équivalente à l'unité de travail.

R_d étant l'unité électro-dynamique de résistance, I_d l'unité d'intensité, W et T les unités de travail et de temps, on a $W = I_d^2 R_d T$, d'où

$$R_d = \frac{W}{I_d^2 T},$$

et, en remplaçant I_d par ses dimensions, $\frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{1}{2}}}{T}$, et W par $\frac{ML^2}{T^2}$ (n° 27),

$$R_d = \frac{L}{T}.$$

La résistance est donc représentée par une vitesse.

Enfin la force électromotrice, e, se déduit de la formule d'Ohm $i = \frac{e}{r}$, ou

$$e = ri,$$

on a $e = 1$ lorsque $r = 1$ et $i = 1$.

En remplaçant r et i par les unités R_d et I_d, on trouve pour l'unité électro-dynamique de force électromotrice E_d

$$E_d = R_d I_d,$$

ou, en substituant à la place de R_d et de I_d les valeurs trouvées ci-dessus,

$$E_d = \frac{M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}}}{T^2};$$

ce sont les dimensions de la force électromotrice.

Nous n'insisterons pas sur les valeurs de ces unités qui, ainsi qu'on le verra, ne diffèrent que par un simple coefficient numérique des unités électro-magnétiques qui sont généralement adoptées.

CHAPITRE VIII.

PHÉNOMÈNES ET UNITÉS MAGNÉTIQUES.

160. ***Phénomènes élémentaires.*** — Les unités électromagnétiques, ayant pour point de départ les unités magnétiques, nous passerons d'abord en revue ces dernières.

On sait que le magnétisme est la propriété d'attirer le fer dont jouit un minerai de fer (oxyde magnétique de fer, représenté par la formule Fe^3O^4), que cette propriété se communique, soit à titre permanent à l'acier, soit à titre provisoire au fer doux, et qu'on nomme *aimants* les corps qui en jouissent naturellement et ceux auxquels elle a été communiquée artificiellement.

L'action magnétique se concentre, en général, aux deux extrémités des aimants en deux points, dont l'un, nommé pôle nord, austral ou positif, tend à se diriger vers le nord de la terre, tandis que l'autre, appelé pôle sud, boréal ou négatif, tend à se diriger vers le sud. Les mots *nord* et *sud* s'appliquent à la direction que tend à prendre l'aimant; les mots *austral* et *boréal* à la nature des pôles qui, lorsque l'aimant est orienté, doivent être contraires à ceux du globe terrestre considéré lui-même comme un aimant. On sait, en effet, que les pôles de deux aimants se repoussent s'ils tendent à se diriger l'un et l'autre vers le nord ou vers le sud de la terre, et qu'ils s'attirent si l'un tend à se diriger vers le sud et l'autre vers le nord.

Les aimants agissent non-seulement sur le fer, mais encore sur la plupart des corps solides, liquides ou gazeux dont les uns, nickel, cobalt, manganèse, oxygène, etc. (*), sont attirés par les pôles des aimants, et sont nommés paramagnétiques ou simplement magnétiques, tandis que les autres, bismuth, antimoine, zinc, mercure, eau, etc., sont repoussés et sont appelés diamagnétiques. L'action des aimants sur ces corps est infiniment moindre que sur le fer; aussi ne nous en occuperons-nous pas.

161. Les phénomènes magnétiques sont essentiellement moléculaires, chaque particule d'un corps aimanté, si petite qu'elle soit, se comportant comme un petit aimant et ayant par conséquent deux pôles. Ce fait a conduit Coulomb à supposer que les molécules des corps magnétiques contiennent deux fluides distincts, qui sont réunis quand le corps est à l'état neutre, tandis qu'ils sont séparés lorsqu'il est aimanté, la séparation étant plus ou moins complète, suivant que l'aimantation est plus ou moins forte.

Ampère a été amené, par l'étude des phénomènes électro-magnétiques, à une hypothèse différente qui paraît se rapprocher davantage de la réalité. D'après cette hypothèse, chaque molécule d'un corps magnétique est un véritable aimant ayant deux pôles, mais les diverses molécules ont des orientations irrégulières, et la somme de leurs actions sur un point extérieur est nulle; l'aimantation se produit lorsque, sous l'influence d'une

(*) Le pouvoir magnétique du fer étant représenté par 100.000, celui d'un poids égal d'oxygène est 377, et celui d'un poids égal d'air 88; on en conclut que l'atmosphère entière de la terre agit au point de vue magnétique comme une couche de fer qui envelopperait notre globe et aurait $\frac{1}{10}$ de millimètre d'épaisseur.

action extérieure, les éléments moléculaires prennent une même orientation, orientation qui persiste dans l'acier ou les corps doués de force coercitive, et qui cesse dans le fer doux avec la cause qui l'avait produite. C'est ce qui expliquerait les bruits que l'on entend quand, à l'aide d'un courant électrique, on aimante et l'on désaimante rapidement un barreau de fer doux. Quant à l'origine de l'aimantation des molécules, elle résulterait de courants électriques permanents qui circuleraient autour de chacune d'entre elles.

162. Quoi qu'il en soit, un corps ne peut jouir des propriétés magnétiques que si dans une certaine étendue de ce corps les molécules ont leurs pôles orientés de la même manière. Les pôles contraires en présence s'annulent au contact des molécules voisines si l'aimantation est régulière, mais aux deux extrémités se trouvent, d'un côté un pôle nord et de l'autre un pôle sud qui sont libres.

La séparation des deux fluides dans un aimant permanent est maintenue par une force spéciale nommée force coercitive et par l'action réciproque des pôles contraires des molécules qui se suivent. Cette dernière action étant plus faible aux extrémités d'un aimant qu'en son milieu, on comprend que la séparation des deux fluides y soit moindre, et que par suite le magnétisme libre occupe un certain volume, qui reste sensiblement le même lorsque la longueur des aimants dépasse une certaine limite.

Entre les deux parties d'un aimant, dont les aimantations sont de noms contraires, il existe toujours une surface sans action magnétique, dont l'intersection avec la surface extérieure se nomme la ligne neutre. Si l'aimant a une grande longueur, l'espace neutre peut occuper une certaine étendue; on peut même concevoir des aimants

fortement aimantés qui soient complétement neutres et paraissent dépourvus de magnétisme; c'est ce qui a lieu, par exemple, pour un anneau circulaire en acier régulièrement aimanté dans toute son étendue, ou encore pour un système composé de deux aimants également aimantés dont les pôles égaux et de noms contraires sont mis en contact.

On peut d'ailleurs concevoir et réaliser des aimants dont l'aimantation soit très-irrégulière, tels, par exemple, que des aimants rectilignes dont la ligne neutre soit située en un point quelconque de la longueur ou qui possèdent plus de deux pôles, qu'une sphère pleine ayant un pôle déterminé au centre et un pôle de nom contraire épanoui sur la surface ou deux pôles de même nom au centre et à la surface et un pôle de nom contraire situé sur une surface sphérique intermédiaire, etc., etc.

Ces divers effets s'obtiennent, soit par un mode particulier d'aimantation, soit en réunissant convenablement un certain nombre d'aimants régulièrement aimantés.

Dans les aimants ordinaires, le magnétisme ne pénètre que jusqu'à une faible profondeur. Si l'on enlève par dissolution une petite couche de métal, on trouve, en effet, que l'intérieur est dépourvu des propriétés magnétiques. La pénétration du magnétisme est d'ailleurs plus ou moins grande, suivant que l'aimantation est plus ou moins forte.

M. Jamin a même pu superposer dans un même barreau d'acier plusieurs couches magnétiques de sens opposés et pénétrant à des profondeurs différentes. Ces diverses couches peuvent produire des effets contraires qui se détruisent, de sorte qu'un barreau d'acier peut paraître à l'état neutre et reprendre ses propriétés ma-

gnétiques, si l'on enlève une petite couche superficielle en le plongeant dans un acide.

Dans l'étude des grandeurs magnétiques, on n'a à se préoccuper que du magnétisme libre aux divers points des aimants, c'est-à-dire de l'excès du magnétisme du pôle d'une molécule sur le magnétisme contraire de la molécule suivante.

Grandeurs magnétiques.

163. *Lois des attractions et répulsions magnétiques, unité de quantité.* — Deux quantités de magnétisme sont égales lorsque, placées de la même manière par rapport à un aimant, elles sont soumises à des actions identiques; elles sont égales et de noms contraires lorsque les actions exercées par l'aimant sont égales et dirigées en sens opposés, ce qui permet dans les calculs de considérer l'une d'elles comme négative. Enfin, l'une des quantités de magnétisme est n fois plus grande ou plus petite que l'autre, si l'action de l'aimant est n fois plus grande ou n fois plus petite.

Lorsque le magnétisme occupe un certain volume, un aimant suffisamment éloigné exerce en chaque point de ce volume des forces qui sont sensiblement parallèles. Le point d'application de ces forces est le pôle de la masse magnétique, et la quantité de magnétisme libre répandue dans le volume représente l'intensité du pôle magnétique.

Dans les aimants régulièrement aimantés, le magnétisme n'est libre que vers les deux extrémités dont l'une contient du fluide austral et l'autre une égale quantité de fluide boréal, et ces deux fluides peuvent, dans les

actions magnétiques à distance, être considérés comme concentrés en deux points qui sont les pôles de l'aimant.

164. Les phénomènes d'attraction et de répulsion magnétiques ont été étudiés par Coulomb au moyen de la balance de torsion et par la méthode des oscillations; ils peuvent se résumer dans la loi suivante :

Deux pôles magnétiques d'intensité μ et μ' situés à une distance a agissent l'un sur l'autre par attraction avec une force f qui a pour expression

$$f = \frac{K\mu\mu'}{a^2},$$

K étant une constante positive. La force f est répulsive si les deux pôles sont de même nom et est attractive s'ils sont de nom contraire.

On déduit de cette équation l'unité absolue de quantité ou de pôle magnétique en supposant μ positif et en faisant $K = 1$, $f = 1$, $a = 1$, et $\mu = \mu'$, ce qui conduit à $\mu = 1$. L'unité est donc la quantité de magnétisme nord ou positif qui repousserait une égale quantité de magnétisme semblable située à l'unité de distance avec l'unité absolue de force. Cette unité étant admise, la force avec laquelle agissent l'une sur l'autre les deux quantités magnétiques ou les deux pôles μ et μ' est

$$f = \frac{\mu\mu'}{a^2},$$

la force f étant répulsive lorsque sa valeur est positive, et attractive dans le cas contraire.

Les dimensions de l'unité de quantité ou de pôle magnétique, que nous représenterons par N, se déduisent de l'équation précédente, en faisant $f = F$, $d = L$, $\mu = \mu' = N$, F et L étant les unités absolues de force et de longueur; cette équation devient, en effet,

$$F = \frac{N^2}{L^2},$$

d'où

$$N = L\sqrt{F},$$

et, en remplaçant F par ses dimensions $\frac{LM}{T^2}$,

$$N = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

Si un pôle magnétique μ est soumis à l'action de plusieurs pôles μ_1, μ_2, μ_3, etc., situés à des distances a_1, a_2, a_3, etc., chacun de ces derniers exerce, suivant la ligne qui le joint au pôle μ, une force $\frac{\mu\mu_1}{a_1^2}$, $\frac{\mu\mu_2}{a_2^2}$, $\frac{\mu\mu_3}{a_3^2}$, etc. La résultante de ces diverses forces donne l'action totale; on peut la calculer en décomposant chacune des forces élémentaires suivant trois axes rectangulaires.

165. *Champ et potentiel magnétiques.* — Les attractions et répulsions magnétiques variant en raison inverse du carré de la distance, on peut appliquer au magnétisme la théorie du potentiel exposée précédemment à l'occasion des phénomènes électriques.

On nomme champ magnétique tout espace soumis à une action magnétique, c'est-à-dire tel que le pôle d'un aimant qui se trouverait dans cet espace y subirait une action magnétique, quelle qu'en soit d'ailleurs l'origine.

L'intensité d'un champ en un point est la grandeur de la force qui agirait sur l'unité de pôle magnétique concentrée en ce point. En représentant par h cette intensité, et par μ celle d'un pôle magnétique, on a pour la force f qui agit sur ce dernier

$$f = \mu h.$$

L'unité d'intensité de champ magnétique H est celle

du champ qui produirait l'unité de force F sur l'unité du pôle magnétique N, on a donc

$$F = NH.$$

En remplaçant F et N par leurs dimensions $F = \frac{LM}{T^2}$ et $N = \frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$, on obtient, pour celles de l'intensité d'un champ magnétique,

$$H = \frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}T}.$$

Il résulte de ces dimensions que l'unité d'intensité d'un champ magnétique ne change pas lorsque le rapport $\frac{M}{L}$ reste constant ; ainsi elle est la même lorsqu'on adopte pour unités fondamentales, comme nous l'avons fait jusqu'ici, le mètre et la masse du gramme, ou lorsqu'on adopte le millimètre et la masse du milligramme.

166. Le potentiel magnétique d'un point quelconque d'un champ magnétique, U, est la somme

$$\frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{\mu_3}{r_3} + \text{etc.} = \sum \frac{\mu}{r}$$

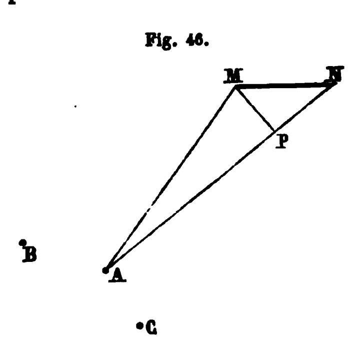
des rapports des masses magnétiques μ_1, μ_2, μ_3, qui existent dans le champ à leurs distances r_1, r_2, r_3, etc. au point considéré.

Les masses magnétiques μ_1, μ_2, μ_3, etc. peuvent, en général, être considérées comme concentrées aux pôles des aimants qui se trouvent dans le champ (*).

(*) Si la distance de quelques aimants au point considéré était trop faible pour qu'on pût regarder le magnétisme comme concentré aux pôles, la partie du potentiel correspondante serait $\int \frac{\rho\, dx\, dy\, dz}{r^2}$, ρ étant

On démontre aisément, comme pour l'électricité, que le travail effectué par l'unité de magnétisme, en se transportant d'un point à un autre, est égal à la différence des potentiels $U - U'$ de ces deux points. Soient, en effet, MN (*fig.* 46) la ligne parcourue pendant un petit intervalle de temps par l'unité de magnétisme concentrée en M, et A, B, C, etc., les points où se trouvent concentrées des masses magnétiques μ_1, μ_2, μ_3, etc. La force exercée par la quantité de magnétisme μ_1, concentrée en A, sur l'unité de magnétisme située en M, est, si $AM = r_1$, $\frac{\mu_1}{r_1^2}$, et le travail w_1, produit par cette force pendant le mouvement de l'unité magnétique de M en N, est : $w_1 = \frac{\mu_1 d_1}{r_1^2}$, d_1 étant la différence des longueurs AN et AM, qui est sensiblement égale à la projection PN, de MN sur AN. D'un autre côté :

Fig. 46.



$$\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_1}{r_1 + d_1} = \frac{\mu_1 d_1}{r_1(r_1 + d_1)}$$

ou, en négligeant d_1 devant r_1,

$$\frac{\mu_1}{r_1} - \frac{\mu_1}{r_1 + d_1} = \frac{\mu_1 d_1}{r_1^2}.$$

On a donc

$$w_1 = \frac{\mu_1}{r} - \frac{\mu_1}{r_1 + d_1}.$$

la densité du magnétisme au point dont les ordonnées sont x, y et z, ou le rapport de la quantité magnétique contenue dans un élément de volume à la grandeur de ce volume.

De même le travail w_2 dû à l'action de la masse μ_2 concentrée en B est

$$w_2 = \frac{\mu_2}{r_2} - \frac{\mu_2}{r_2 + d_2};$$

celui dû à l'action de la masse μ_3 cencentrée en C est

$$w_3 = \frac{\mu_3}{r_3} - \frac{\mu_3}{r_3 + d_3},$$

et ainsi de suite.

On a donc pour le travail total w, dû au transport de l'unité de pôle magnétique de M et N,

$$w = w_1 + w_2 + w_3 + \text{etc.} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{\mu_3}{r_3} - \frac{\mu_1}{r_1 + d_1} - \frac{\mu_2}{r_2 + d_2} - \frac{\mu_3}{r_3 + d_3}$$

ou, en posant,

$$\sum \frac{\mu}{r} = \frac{\mu_1}{r_1} + \frac{\mu_2}{r_2} + \frac{\mu_3}{r_3} + \text{etc.}$$

et

$$\sum \frac{\mu}{r'} = \frac{\mu_1}{r_1 + d_1} + \frac{\mu_2}{r_2 + d_2} + \frac{\mu_3}{r_3 + d_3} + \text{etc.}$$

$$w = \sum \frac{\mu}{r} - \sum \frac{\mu}{r'} = \mathrm{U} - \mathrm{U}'.$$

Si l'unité de magnétisme passe du point N à un autre point voisin, le travail effectué w' sera encore égal à la différence des potentiels U' et U'' de ces deux points, ou à U' — U''; pendant le passage de ce troisième point à un quatrième ayant pour potentiel U''', le travail sera U''— U''' et ainsi de suite. Le travail total $w + w' + w''\ldots = \mathrm{W}$ effectué pendant le passage d'un point dont le potentiel est U à un autre point dont le potentiel est U_n est donc égal à la différence de ces potentiels, ou

$$\mathrm{W} = \mathrm{U} - \mathrm{U}_n = \sum \frac{\mu}{r} - \sum \frac{\mu}{r_n}.$$

Une quantité de magnétisme μ, en se transportant de l'un des points à l'autre, produit un travail égal à $\mu\mathrm{W}$, ou

à $\mu(U - U_n)$. Ce travail est positif si μ et $U - U_n$ sont de même signe, et négatif dans le cas contraire.

Pour un point situé à une distance infiniment grande des masses magnétiques, le potentiel $U_n = \sum \frac{\mu}{r_n}$ est nul et l'expression $U - U_n = \sum \frac{\mu}{r} - \sum \frac{\mu}{r_n}$ devient $U = \sum \frac{\mu}{r}$.

On peut donc définir le potentiel magnétique en un point comme étant « la quantité de travail que développerait l'unité de quantité magnétique en se transportant de ce point à l'infini sous l'influence des seules forces magnétiques ».

Les dimensions du potentiel magnétique se déduisent de l'expression $U = \sum \frac{\mu}{r}$, qui devient $U = \frac{\mu}{r}$, s'il n'existe qu'une seule masse magnétique μ, située à une distance r du point considéré. En remplaçant μ par l'unité de quantité magnétique N, et r par l'unité de longueur L,

$$U = \frac{N}{L};$$

en substituant à la place de N ses dimensions, données plus haut, on trouve pour celles du potentiel

$$U = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

167. Les points de l'espace pour lesquels $U = \sum \frac{\mu}{r}$ est constant forment des surfaces dites équipotentielles ou de niveau.

Un pôle magnétique ne développe ou n'absorbe aucun travail en passant d'un point à un autre d'une de ces surfaces, puisque $W = U - U_n = 0$. La force résultante due aux diverses actions magnétiques d'un champ est donc en

chaque point normale à la surface équipotentielle ou de niveau qui passe par ce point.

On peut concevoir une série de lignes normales aux surfaces équipotentielles. La tangente à ces lignes, nommées lignes de force, donne en chaque point la direction de la force magnétique; cette direction est celle que prendrait un petit aimant libre de tourner autour de son centre. En chacun des points de l'espace il passe une surface équipotentielle et une ligne de force.

La conception des lignes équipotentielles et des lignes de force permet, comme dans la théorie de l'électricité, d'explorer complétement un champ magnétique.

Si le champ magnétique est dû à une seule masse magnétique μ concentrée en un point, les surfaces équipotentielles, données par l'équation $\frac{\mu}{r} = C$, sont des sphères concentriques ayant pour centre le point où se trouve la masse magnétique, et les lignes de force sont les rayons de ces sphères.

Supposons deux masses magnétiques égales de fluides contraires concentrées aux deux pôles A et B (*fig.* 47), ce qui est le cas des aimants ordinaires, lorsqu'on ne tient pas compte du magnétisme terrestre. Les surfaces équipotentielles ou de niveau sont données par l'équation $\frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r'} = C$, ou, en représentant par C′ la constante $\frac{C}{\mu}$,

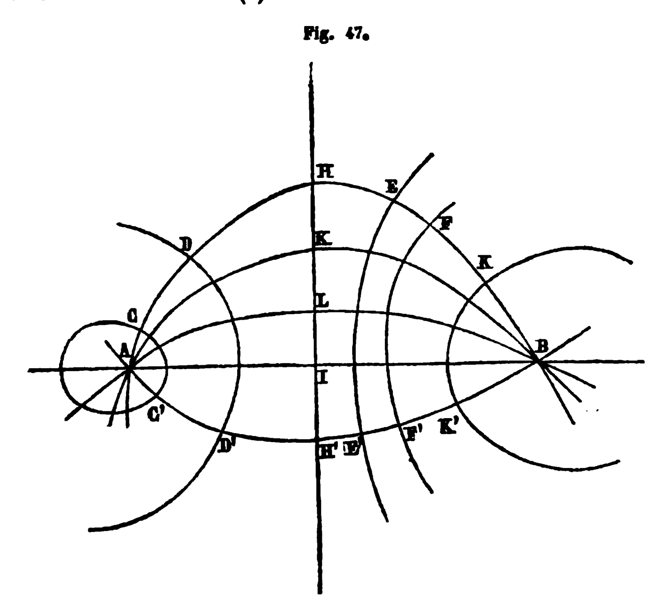
$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r'} = C'.$$

Ce sont des surfaces représentées par les courbes CC′, DD′, EE′, etc., qui entourent chacun des deux pôles, celle qui passe par le milieu de la ligne AB étant un plan perpendiculaire, HH′, à cette ligne.

Les lignes de force sont des courbes AHB, AKB,

ALB, etc., qui passent par les deux points A et B et sont normales aux surfaces de niveau ; la ligne droite AB est une de ces courbes (*).

Fig. 47.



Quant à la grandeur de la force qui agirait sur l'unité de masse magnétique supposée placée en un point quelconque, E, elle a pour valeur

$$\frac{U - U'}{EF},$$

U et U' étant les potentiels de deux surfaces de niveau

(*) L'équation de ces courbes est, en prenant pour axe des x la ligne AB, et pour axe des y la perpendiculaire élevée au milieu de cette ligne,

$$\frac{x-a}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} + \frac{x+a}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} = K,$$

K étant une constante.

très-voisines, et EF la longueur de la normale comprise entre les deux surfaces.

Il est facile de voir que pour chacune des lignes de force telle que AHB, c'est au sommet, H, que la force magnétique a sa plus petite valeur, et qu'elle augmente à mesure que l'on se rapproche, soit de l'un, soit de l'autre des pôles contraires A et B.

Enfin, si l'on considère un espace limité placé à une très-grande distance des masses agissantes, les lignes de force sont des lignes droites sensiblement parallèles et les surfaces équipotentielles des plans normaux à ces lignes; la grandeur de la force magnétique est la même aux divers points. On a pour cet espace limité un champ magnétique uniforme dont l'action de la terre donne un exemple. La direction et l'intensité du magnétisme varient en effet aux divers points du globe, mais, si l'on considère un espace d'une étendue restreinte, les lignes de force dont la direction est donnée par celle de l'aiguille aimantée sont parallèles.

168. *Moment magnétique.* — Lorsqu'un barreau ou une aiguille sont régulièrement aimantés, ils possèdent deux pôles égaux de noms contraires qui sont situés à une petite distance des deux extrémités.

Un champ magnétique uniforme produit sur les deux pôles deux forces égales et de directions contraires qui donnent lieu à un couple, et par conséquent la ligne des pôles, ou l'axe de l'aimant, tend à prendre une direction parallèle aux lignes de force du champ.

Si l'aimant est placé normalement à ces lignes de force, le couple qui tend à le faire tourner pour l'amener dans leur direction est $2\lambda P$, 2λ étant la distance des pôles et P la force qui agit sur chacun d'eux; la force P est égale au produit de l'intensité des pôles, μ, de l'aimant

par celle du champ magnétique, h, dans laquelle il se trouve. Le moment de rotation est donc $2\lambda\mu h$.

Le produit $2\lambda\mu$ de l'intensité de chacun des pôles, μ, par leur distance, 2λ, est le moment absolu de l'aimant ou de l'aiguille aimantée. L'unité de moment magnétique est celui d'un aimant dont les deux pôles auraient l'unité d'intensité magnétique et qui seraient distants l'un de l'autre de l'unité de longueur.

Les dimensions du moment magnétique, que nous représenterons par O, sont donc

$$O = NL,$$

N étant l'unité de pôle magnétique définie plus haut et L l'unité de longueur, ou, en remplaçant N par $\frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$,

$$O = \frac{L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

Action magnétique de la terre.

169. *Déclinaison et inclinaison.* — L'exploration d'un champ magnétique comprend la détermination, en chacun des points du champ, de la direction des lignes de force et celle de son intensité, c'est-à-dire de la grandeur de la force qui agit sur l'unité de pôle magnétique.

Pour le magnétisme terrestre, la direction de la force magnétique se déduit de celles de ses deux composantes, horizontale et verticale, aux divers points du globe, c'est-à-dire de la déclinaison et de l'inclinaison qui sont données par des instruments spéciaux nommés boussoles.

La boussole de déclinaison fait connaître l'angle de la direction de la force magnétique avec le plan du méridien terrestre, et la boussole d'inclinaison son angle avec le plan horizontal.

La première comprend un cercle horizontal gradué, appelé cercle azimutal, au centre duquel une aiguille aimantée est mobile sur un pivot. Une lunette fixée sur l'appareil permet de viser un astre connu et de faire tourner le cercle azimutal, de façon que le zéro se trouve dans le plan méridien. La déclinaison est donnée par la déviation de l'aiguille, qui est maintenue horizontale par un excès de poids donné dans nos contrées à la moitié qui correspond au pôle sud ou boréal.

Pour la boussole d'inclinaison, l'aiguille aimantée se meut devant un cercle vertical gradué; elle est mobile autour d'un axe horizontal qu'on tourne de façon à amener le plan vertical de l'aiguille dans le plan du méridien magnétique. L'angle formé par l'aiguille avec la ligne horizontale qui passe par son centre donne l'inclinaison magnétique.

Ces instruments sont trop connus pour qu'il soit nécessaire de les décrire ici plus complétement.

170. Les points de la terre pour lesquels l'inclinaison est égale forment des lignes dites isocliniques, qu'on nomme aussi parallèles magnétiques. Ces lignes diffèrent assez notablement des parallèles terrestres. Le parallèle magnétique pour lequel l'inclinaison est nulle se nomme équateur magnétique. L'inclinaison augmente à mesure qu'on s'en éloigne; les points où elle est égale à 90° sont les pôles magnétiques de la terre.

Suivant M. Duperrey, la terre aurait deux pôles magnétiques de nom contraire dont les positions seraient à peu près :

Pour l'un : 79° 11′ N 78° 20′ O,
Pour l'autre: 79° 12′ S et 101° 40′ E.

Les courbes pour lesquelles la déclinaison est la même, dites courbes isogoniques, constituent les méridiens magnétiques. Leur étude a conduit M. Hansteen à admettre qu'il existe quatre pôles magnétiques au lieu de deux; sur ces quatre pôles, deux seraient situés aux environs du pôle nord de la terre et deux aux environs du pôle sud (*).

L'inclinaison et la déclinaison sont soumises à des variations de diverses natures.

Les unes sont journalières et produisent des oscillations qui, pour la déclinaison, varient de 5 à 25 minutes; d'autres, d'environ 15 à 18 minutes, sont annuelles; d'autres enfin, plus importantes, sont séculaires. La déclinaison moyenne, qui était à Paris de 11° 30′ Est en 1580, a diminué peu à peu, a été nulle en 1663, puis a passé à l'Ouest; elle a atteint un maximum de 22° 34′ en 1814 et décroît depuis cette époque; elle était de 20°17′ en 1853 et de 18° 44′ en 1863.

L'inclinaison, qui en 1661 était de 75°, a constamment diminué depuis lors; elle était, en 1870, de 65°35′.

Ces variations ne permettent pas d'attribuer le magnétisme terrestre à la présence de masses magnétiques fixes. L'hypothèse due à Ampère de courants électriques qui parcourent la surface de notre globe de l'Est à l'Ouest et agissent sur l'aiguille aimantée semble seule admissible. L'enveloppe terrestre n'étant pas homogène, ces courants trouvent des parties plus ou moins conductrices qui modifient leur marche, ce qui explique la forme irrégulière des parallèles et des méridiens magnétiques.

(*) *Traité d'électricité* de M. de la Rive.

L'origine de ces courants nous est inconnue; ils tiennent sans doute à des causes diverses telles que le mouvement de la terre et son frottement contre l'espace éthéré, une action inductrice du soleil, de la lune, et en général des corps planétaires qui se comportent comme des aimants, l'influence magnétique de l'oxygène de l'atmosphère, qui varie avec la température, etc. Quant aux variations annuelles et diurnes, elles paraissent liées aux variations de la température à la surface de la terre, soit que ces variations aient une action directe, soit qu'elles affectent seulement la conductibilité de la couche superficielle de notre globe.

Enfin les courants aériens, qui entraînent de l'équateur aux pôles la vapeur d'eau qui se forme dans les régions tropicales, ont également une influence sur la direction de l'aiguille aimantée. Ces vapeurs sont chargées d'électricité positive qui dans nos climats produit des orages, mais la plus grande partie de ces vapeurs se transporte aux environs des pôles, où elles se condensent; il en résulte un courant électrique à peu près continu, allant de l'équateur au pôle dans les régions supérieures de l'atmosphère et du pôle à l'équateur à l'intérieur de la terre. Ce courant, qui n'enveloppe pas notre globe d'une façon absolument régulière, exerce une action magnétique continue à la surface de la terre.

Il arrive souvent que, par suite de circonstances particulières, l'intensité de ce courant change subitement, ce qui donne lieu au phénomène connu sous le nom d'aurores boréales ou d'orages magnétiques, et l'on comprend que l'aiguille aimantée en soit affectée; les variations accidentelles qu'elle éprouve sous cette influence atteignent parfois 60 à 70 minutes.

Les courants qu'on observe sur les lignes télégra-

phiques pendant les aurores boréales sont probablement dus à une induction qui se manifeste sur les fils conducteurs lorsque l'intensité du grand courant électrique de l'équateur au pôle se modifie.

171. *Intensité du magnétisme terrestre.* — L'action exercée par le magnétisme terrestre sur les deux pôles d'un aimant dont le moment magnétique est $2\lambda\mu$ produit, si h est l'intensité du champ magnétique de la terre, un couple égal à $2\lambda\mu h$, lorsque l'axe de l'aiguille est normal aux lignes de force et égal à $2\lambda\mu h \sin i$ lorsqu'il forme un angle i avec ces lignes.

Si l'aimant est une aiguille de déclinaison, maintenue horizontale par un contre-poids, le couple qui agit sur elle, lorsqu'elle est normale à sa position d'équilibre, est $2\lambda\mu h \cos\theta$, θ étant l'angle d'inclinaison du lieu d'observation, ou $2\lambda\mu h_1$, si l'on pose $h_1 = h\cos\theta$; h_1 est la composante horizontale du magnétisme terrestre.

Le produit $2\lambda\mu h$ du moment magnétique de l'aiguille, $2\lambda\mu$, par la force magnétique de la terre, h, ou le produit $2\lambda\mu h_1$, peuvent se déterminer expérimentalement, soit par la méthode de torsion, soit, mieux encore, par celle des oscillations.

Une aiguille aimantée, déviée de sa position d'équilibre, décrit une série d'oscillations qui sont isochrones lorsqu'elles ont une faible amplitude et auxquelles la formule du pendule est applicable.

On sait que la théorie du pendule composé conduit à la formule

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{Pl}},$$

dans laquelle t est la durée d'une oscillation simple, P le poids du pendule, l la distance de son centre de gravité à

l'axe de suspension, et Σmr^2 (*) son moment d'inertie par rapport à cet axe.

Si l'on applique cette formule aux oscillations d'une aiguille aimantée mobile autour de son centre, il suffit de remplacer le poids P par la force qui agit sur l'aiguille, égale au produit du magnétisme μ de l'un des pôles par l'intensité h du champ, ce qui conduit à

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{2\lambda\mu h}},$$

Σmr^2 étant le moment d'inertie pris par rapport à l'axe de rotation de l'aiguille entière, dont la distance des deux pôles magnétiques est 2λ.

De cette équation on tire

$$h = \frac{\pi^2 \Sigma mr^2}{2\lambda\mu} \times \frac{1}{t^2}.$$

On peut se servir directement de cette formule pour comparer la force magnétique de la terre aux divers points du globe, en faisant usage d'une boussole d'inclinaison ; mais l'aiguille de cette boussole étant soumise à des frottements relativement considérables par suite de son mode de suspension, il est préférable d'employer l'aiguille de déclinaison, qui peut être supportée par un léger fil sans torsion n'opposant au mouvement qu'une résistance insignifiante.

Si l'aiguille est disposée de façon à rester horizontale, et si Σmr^2 représente la valeur de son moment d'inertie, en tenant compte du contre-poids qu'il a fallu ajouter,

(*) m est la masse d'un élément de volume et r sa distance à l'axe de suspension. La somme Σmr^2 doit être prise pour la masse entière du pendule.

on a, pour la composante horizontale h_1 du magnétisme terrestre,

$$h_1 = h\cos\theta = \frac{\pi^2\Sigma mr^2}{2\lambda\mu} \times \frac{1}{t^2},$$

θ étant l'angle d'inclinaison magnétique du lieu d'observation et t la durée d'une oscillation simple horizontale.

On en tire

$$h = \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\pi^2\Sigma mr^2}{2\lambda\mu} \times \frac{1}{t^2}.$$

Si l'on fait osciller l'aiguille dans un autre lieu pour lequel l'inclinaison magnétique soit θ', on a

$$h' = \frac{1}{\cos\theta'} \times \frac{\pi^2\Sigma mr^2}{2\lambda\mu} \times \frac{1}{t'^2}.$$

Ces deux équations donnent

$$\frac{h}{h'} = \frac{t'^2\cos\theta'}{t^2\cos\theta},$$

ou, si l'on nomme n et n' le nombre d'oscillations exécutées par l'aiguille dans un même intervalle de temps T,

$$\frac{h}{h'} = \frac{n^2\cos\theta'}{n'^2\cos\theta}.$$

Cette formule n'est rigoureusement exacte que si le moment d'inertie Σmr^2 est identiquement le même dans les deux expériences; on peut admettre qu'il en est ainsi, en général, à cause de la petitesse du contre-poids nécessaire pour maintenir l'aiguille horizontale.

Les résultats obtenus dans une série assez longue d'expériences ne sont directement comparables que si le magnétisme de l'aiguille reste constant, ce qui n'a pas lieu ordinairement, car il diminue lorsque la température s'élève. Pour faire la correction, on fait au préalable osciller l'aiguille dans une pièce dont on fait varier la

température, et l'on note la durée des oscillations de façon à pouvoir comparer entre eux les résultats obtenus dans des circonstances identiques. A la fin des expé[illegible]iences, on rapporte l'aiguille au point de départ et on la [illegible]t osciller de nouveau pour s'assurer que son magné[illegible]ne ne s'est pas modifié. Une formule d'interpolation [illegible]et de rectifier les résultats obtenus si l'altération du m[illegible]étisme de l'aiguille est peu considérable.

[illegible]r qu'on puisse avoir un nombre suffisant d'oscillati[illegible]s, le premier écart de l'aiguille doit être d'environ[illegible], et, dans ces conditions, la formule ordinaire du pen[illegible]e doit être corrigée en tenant compte de l'amplitu[illegible] des oscillations et de la manière dont cette amplitu[illegible] diminue.

P[illegible] les expériences à faire dans un même lieu, on se ser[illegible]instruments plus délicats et plus précis imaginés pa[illegible]uss, et qu'on nomme magnétomètres unifilaires ou [illegible]aires, suivant que l'aimant est suspendu par un ou [illegible]deux fils. La déviation est donnée par le déplacemen[illegible] l'image d'un point lumineux réfléchi sur une échel[illegible]raduée par un petit miroir que supporte l'aimant,[illegible] qui permet l'enregistrement automatique des résult[illegible] par la photographie (*).

1[illegible] La force magnétique de la terre augmente à [illegible] que l'on s'éloigne de l'équateur magnétique et [illegible] l'on se rapproche des pôles. En représentant par 1 la force magnétique à l'équateur, elle est 1,2 à 45° de latitude, 1,4 à 73°, 1,6 à 81°, 1,7 à 86°. Ces nombres ne sont que des moyennes, car les variations de l'intensité magnétique sont assez irrégulières, les lignes isodyna-

(*) Voir la description de ces appareils dans le *Traité d'électricité* de M. de la Rive.

miques ne concordant pas avec les courbes d'égale inclinaison. D'après M. Hansteen, le rapport qui existe entre la plus forte et la plus faible intensité magnétique atteindrait 2,5 (à New-York et à Sainte-Hélène).

L'intensité du magnétisme terrestre est d'ailleurs soumise, comme la déclinaison et l'inclinaison, à des variations régulières et à des variations accidentelles qui tiennent sans doute aux mêmes causes.

173. La durée des oscillations d'une aiguille aimantée de déclinaison permet de comparer l'intensité du champ magnétique aux divers points de la terre, mais elle ne fait pas connaître la valeur exacte de cette intensité.

L'équation

$$2\lambda\mu h \cos\theta = \frac{\pi^2 \Sigma mr^2}{t^2}$$

donne, lorsque Σmr^2 est connu et que t a été déterminé par l'expérience, le produit du moment magnétique de l'aiguille $2\lambda\mu$ par la composante horizontale $h\cos\theta = h_1$ du magnétisme terrestre. Pour déterminer les valeurs de $2\lambda\mu$ et de h_1, il faut une seconde expérience.

Poisson, le premier, a fait cette détermination, mais il n'est pas arrivé à des résultats suffisamment exacts. La méthode de Gauss, qui repose sur l'action de deux aimants, permet de résoudre le problème avec une grande précision.

On détermine, en premier lieu, comme nous venons de le voir, par la méthode des oscillations, le produit $2\lambda\mu \times h_1$ au moyen de la formule

$$2\lambda\mu \times h_1 = \frac{\pi^2 \Sigma mr^2}{t^2}.$$

Le moment d'inertie Σmr^2 peut se déduire du poids et

de la forme de l'aimant, qui est ordinairement un barreau rectangulaire supporté par un étrier; mais afin d'éliminer les causes d'erreur que pourrait entraîner le calcul direct de ce moment, Gauss élimine cette grandeur au moyen de deux expériences qui consistent à suspendre deux poids égaux de part et d'autre à égale distance du point de suspension du barreau et à déterminer la durée des oscillations, qui se trouve modifiée par cette addition.

Si q est la masse de chacun des deux poids égaux, a_1 leur distance au point du suspension, t_1 la durée des oscillations, et A une constante dépendant de la forme des deux masses, la première expérience donne

$$2\mu\lambda \times h_1 = \frac{\pi^2(\Sigma mr^2 + A + 2qa_1^2)}{t_1^2}.$$

Une seconde expérience donne, pour une distance a_2, une durée t_2 des oscillations, qui conduit à la seconde équation

$$2\mu\lambda \times h_1 = \frac{\pi^2(\Sigma mr^2 + A + 2qa_2^2)}{t_2^2}.$$

De ces deux équations on tire

$$2\mu\lambda \times h_1 = \frac{2\pi^2 q(a_2^2 - a_1^2)}{t_1^2 - t_2^2}.$$

Il y a en outre une légère correction à introduire à cause de la torsion du fil qui tend à diminuer la durée des oscillations.

Dans une expérience faite en septembre 1832, à Gœttingue, Gauss a obtenu, en adoptant pour unités fondamentales la seconde, le millimètre et la masse de milligramme

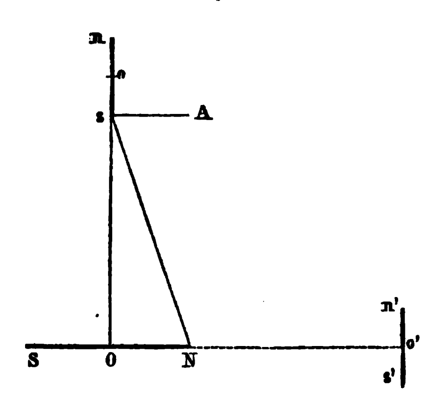
$$2\mu\lambda \times h_1 = 179\,770\,600\ (*).$$

(*) Le poids de l'aiguille était de 96gr,2, celui du poids additionnel q,

174. La seconde expérience consiste à faire agir l'aimant dont on cherche le moment magnétique sur un petit aimant mobile dont on observe la déviation.

On place normalement au plan du méridien magnétique l'aimant NS (*fig.* 48), dont le moment magnétique,


Fig. 48.



$m = 2\lambda\mu$, entre dans la formule précédente, puis à une certaine distance $Oo = R$ on dispose un petit aimant ns mobile autour de son centre o, qui se trouve sur une perpendiculaire Oo élevée sur la ligne des pôles du premier, et passant par son centre O; l'aimant ns est soumis aux actions des pôles N et S qui tendent à le faire tourner.

Représentons par $2\lambda'$ et par μ' la longueur et le magnétisme libre de l'aimant mobile ns, on a pour l'action attractive de N sur s

$$\frac{\mu\mu'}{(Ns)^2};$$

103gr,257; les distances a_1 et a_2 de 80 et 180 millimètres. Enfin le temps d'oscillation t (sans poids additionnel) était 15″,247, $t_1 = 17''{,}686$ et $t_2 = 24''{,}657$.

et pour la composante de cette force suivante la ligne sA, normale à Oo,

$$\frac{\mu\mu'}{(Ns)^2}\cos NsA = \frac{\mu\mu'}{(Ns)^2}\times\frac{\lambda}{Ns} = \frac{\mu\mu'\lambda}{(Ns)^3} = \frac{\mu\mu'\lambda}{[(R-\lambda')^2+\lambda^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Le pôle S produit une action égale. Le moment dû à ces deux forces et qui tend à faire tourner l'aiguille ns autour de son centre, est donc

$$\frac{2\mu\mu'\lambda\lambda'}{[(R-\lambda')^2+\lambda^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

L'action de l'aimant NS sur le pôle n de la petite aiguille est

$$\frac{2\mu\mu'\lambda\lambda'}{[(R+\lambda')^2+\lambda^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et le couple résultant

$$2\mu\mu'\lambda\lambda\left\{[(R-\lambda')^2+\lambda^2]^{-\frac{3}{2}}+[(R+\lambda')^2+\lambda^2]^{-\frac{3}{2}}\right\},$$

ou, en mettant $\frac{1}{R^3}$ en facteur,

$$\frac{2\mu\mu'\lambda\lambda'}{R^3}\left\{\left[\left(1-\frac{\lambda'}{R}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2\right]^{-\frac{3}{2}}+\left[\left(1+\frac{\lambda'}{R}\right)^2+\left(\frac{\lambda}{R}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}\right\}.$$

Si l'on développe cette expression et si l'on néglige les puissances de $\frac{1}{R}$ supérieures à la cinquième, on trouve pour le couple de rotation

$$\frac{4\mu\mu'\lambda\lambda'}{R^3}\left(1+\frac{A}{R^2}\right),$$

le terme A étant un coefficient qui dépend de la forme des aimants.

Quand on traite la question complètement, en n'admettant pas les deux aimants réduits à deux centres ma-

gnétiques, la forme seule du terme A est différente (*).

Si l'aiguille *ns* est mobile, elle dévie et prend une position d'équilibre sous l'action de ce couple et celle de la terre. Lorsque la déviation est très faible et le barreau fixe NS suffisamment éloigné, on peut admettre que l'action de ce dernier est constante.

Le moment de rotation dû à l'action de la terre pour une déviation ω est

$$2h_1\mu'\lambda' \sin\omega.$$

Le moment dû à l'action de l'aimant NS est

$$\frac{4\mu\mu'\lambda\lambda'}{R^3}\left(1+\frac{A}{R^2}\right)\cos\omega;$$

dans la situation d'équilibre, ces moments doivent être égaux, ce qui conduit à l'expression

$$h_1 \sin\omega = \frac{2\mu\lambda}{R^3}\left(1+\frac{A}{R^2}\right)\cos\omega$$

ou

$$\frac{2\lambda\mu}{h_1} = \frac{\tang\omega}{\frac{1}{R^3}+\frac{A}{R^5}}.$$

Il suffit de deux expériences faites avec des valeurs différentes R_1 et R_2 de R pour déterminer $\frac{2\lambda\mu}{h_1}$. On tire, en effet, des deux équations pour lesquelles l'angle de déviation serait ω_1 pour une valeur $R = R_1$ et ω_2 pour une une valeur $R = R_2$,

$$\frac{2\lambda\mu}{h_1} = \frac{R_1^5 \tang\omega_1 - R_2^5 \tang\omega_2}{R_1^2 - R_2^2}.$$

(*) Voir les articles publiés dans le *Journal de Physique* par M. Terquem (année 1872).

Les expériences de Gauss, faites en 1832 (*), ont donné pour le rapport $\frac{2\lambda\mu}{h_1}$

$$\frac{2\lambda\mu}{h_1} = 56606437,$$

alors que le produit $2\lambda\mu h_1$ était, comme nous l'avons dit plus haut,

$$2\lambda\mu h_1 = 179770600.$$

De ces deux expressions on déduit la valeur de la composante horizontale de magnétisme terrestre :

$$h_1 = \sqrt{\frac{179770600}{56606437}}$$

ou

$$h_1 = 1,782088$$

Ainsi qu'il a été dit, l'intensité du magnétisme terrestre est soumise à des variations faibles, mais à peu près continues : quelques jours après, Gauss trouva à Gœttingue 1,7860, puis 1,7965.

Dans une expérience faite en avril 1870, par la même méthode, MM. Cornu et Baille ont trouvé pour l'intensité horizontale de magnétisme terrestre, à Paris, en adoptant les mêmes unités, c'est-à-dire la masse du milligramme et le millimètre, ou, ce qui revient au même ainsi qu'on l'a vu (n° 164), le gramme et le mètre, le nombre 1,920.

En divisant la composante horizontale du magnétisme terrestre par le cosinus de l'inclinaison magnétique, on a la valeur absolue du magnétisme du globe au point où l'expérience a été faite. Ainsi en 1870 l'inclinaison

(*) Les distances R_1 et R_2 étaient de 1.200 et 1.600 millimètres, et les angles de déviation ω ne dépassaient pas 3 degrés.

magnétique était, à Paris, de 65°,35, ce qui conduit au chiffre 4,645 pour la valeur absolue du magnétisme terrestre.

La grandeur du moment magnétique de l'aiguille, $2\lambda\mu$, se déduit des valeurs de $\frac{2\lambda\mu}{h_1}$ et $2\lambda\mu h_1$ trouvées par l'expérience. En représentant par α et β ces deux valeurs, on a

$$2\lambda\mu = \sqrt{\alpha\beta}.$$

175. Le centre de l'aimant mobile, au lieu d'être placé en o sur la normale Oo élevée au centre de l'aimant fixe, peut être placé sur son prolongement, en o' (*fig.* 48).

En analysant, comme nous l'avons fait plus haut, les actions des pôles N et S sur les deux pôles n' et s', on trouve facilement pour le moment de rotation de l'aimant $n's'$ autour de son centre o', en négligeant encore les puissances de R supérieures à la cinquième,

$$\frac{8\mu\mu'\lambda\lambda'}{R^3}\left(1+\frac{A'}{R^2}\right).$$

Ce moment est à peu près double de celui auquel est soumis l'aimant dans la première position, ns, pour une même valeur de R.

En opérant comme il a été dit plus haut, c'est-à-dire en observant les déviations du petit aimant $n's'$, on a une seconde manière de trouver l'intensité du magnétisme terrestre, qui doit conduire naturellement au même résultat que la première, et a l'avantage de donner des angles de déviation plus grands et par suite de diminuer les chances d'erreur d'observation.

Magnétisme des aimants permanents.

176. *Mesure du moment magnétique des aimants.* — La méthode de Gauss pour la détermination de la composante horizontale du magnétisme terrestre h_1, (n° 174), fait connaître la grandeur du moment magnétique, $2\lambda\mu$, de l'aimant employé. On vient de voir, en effet, qu'on a $2\lambda\mu = \sqrt{\alpha\beta}$, α et β étant les valeurs de $\frac{2\lambda\mu}{h_1}$ et de $2\lambda\mu \times h_1$.

Les nombres trouvés par Gauss étant $\alpha = 56606437$ et $\beta = 179770600$, on en déduit pour le moment magnétique de l'aimant dont il s'est servi :

$$2\lambda\mu = 100\,900\,000.$$

Les unités de longueur et de masse adoptées par Gauss étaient, ainsi qu'il a été dit, la seconde, le millimètre et la masse du milligramme; si l'on adopte, comme nous l'avons fait jusqu'ici en général, le mètre et la masse du gramme, le nombre précédent doit être divisé par $1000^{\frac{5}{2}} \times 1000^{\frac{1}{2}}$ (*) ou par 10^9, ce qui conduit à 0,1009.

Lorsqu'on connaît d'avance la valeur exacte du magnétisme terrestre, une seule expérience suffit pour déterminer le moment magnétique d'une aiguille aimantée. En la suspendant et la faisant osciller horizontalement on a en effet (n° 173), si t est la durée d'une oscillation simple en secondes, Σmr^2 le moment d'inertie de l'aiguille par rapport à l'axe autour duquel elle se meut,

(*) Les unités de moment magnétique, O, sont (n° 168):

$$O = \frac{L^{\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

$$2\lambda\mu \times h_1 = \frac{\pi^2\Sigma mr^2}{t^2}, \text{ ou :}$$

$$2\lambda\mu = \frac{\pi^2\Sigma mr^2}{h_1 t^2}.$$

On peut d'ailleurs se dispenser de calculer le moment d'inertie de l'aimant en suspendant de part et d'autre, à des distances égales du point de suspension deux poids égaux et en calculant la durée des oscillations qui correspondent à deux distances différentes (n° 173).

177. *Intensité de magnétisation.* — L'intensité de magnétisation d'un aimant est le rapport de son moment magnétique à son volume. Elle est la même pour de longs aimants droits de même section et de longueurs différentes dont les pôles sont égaux.

Les dimensions de l'intensité de magnétisation s'obtiennent en divisant celles du moment magnétique $O = \frac{L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$ par celles de l'unité de volume, L^3, ce qui donne :

$$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}T}$$

Quant à la quantité de magnétisme libre à chaque pôle, si l'aimant est rectiligne et régulièrement aimanté on peut l'obtenir approximativement en divisant le moment magnétique par la distance des pôles qui, pour les aimants ordinaires dont la longueur dépasse 20 centimètres, sont situés à peu près à 4 millimètres des extrémités. En divisant la quantité de magnétisme libre à chaque pôle par la section, on a l'intensité de magnétisation.

Pour les gros aimants et en particulier pour les aimants en fer à cheval on définit ordinairement leur force

magnétique par le poids que leur armature peut porter. On les forme généralement en juxtaposant un certain nombre de barreaux fortement aimantés. L'aimant construit par le docteur Knight, que possède la Société royale de Londres et qui est le plus puissant des aimants permanents, peut supporter un poids de 50 kilogrammes.

On sait d'ailleurs que les propriétés magnétiques des aimants se perdent assez rapidement lorsqu'ils ne sont pas munis d'armatures, et que leur force coercitive diminue peu à peu lorsque la température s'élève et devient nulle à une certaine limite, qu'on nomme *limite magnétique*, qui est pour le nickel d'environ 350° et pour le fer la température de rouge-cerise.

Corps magnétiques.

178. Certains corps tels que le fer doux, le nickel, le cobalt, l'oxygène, etc., jouissent des propriétés magnétiques lorsqu'ils sont situés dans un champ magnétique et les perdent à peu près complètement aussitôt qu'ils en sont éloignés. C'est à cette propriété qu'est due l'action qu'exercent les aimants permanents sur ces corps, qu'on nomme corps magnétiques.

Coulomb et après lui Poisson, considéraient l'aimantation du fer doux comme due à la séparation de deux fluides dans chaque particule. L'hypothèse de Wéber, qui consiste à regarder chaque molécule des corps magnétiques comme ayant deux pôles, et l'aimantation comme résultant de l'orientation dans une même direction d'un certain nombre de ces molécules, paraît plus naturelle, et s'accorde avec celle d'Ampère sur la cause originelle du magnétisme.

Les fluides magnétiques étant soumis aux mêmes lois

que les fluides électriques, c'est-à-dire se repoussant ou s'attirant, suivant qu'ils sont de même nom ou de nom contraire, proportionnellement à leur masse et en raison inverse du carré de la distance, les mêmes calculs peuvent leur être appliqués et doivent conduire à des résultats identiques, les corps magnétiques dépourvus de force coercitive remplissant le rôle que jouent les conducteurs dans la théorie de l'électricité. La seule différence consiste en ce que les fluides magnétiques contraires de deux corps amenés en contact ne disparaissent pas comme les fluides électriques, mais produisent seulement des effets opposés qui s'annulent. L'effet est analogue à ce qui se passerait si, dans l'étude des phénomènes électriques, on séparait par une lame isolante deux corps conducteurs dont les fluides contraires s'attirent, ou, d'une façon générale, si les molécules des corps électrisés étaient toutes isolées les unes des autres.

Les fluides contraires des molécules contiguës agissent en sens opposé et, comme il a été dit à propos des aimants permanents, on n'a à s'occuper que du fluide libre, c'est-à-dire de l'excès en chaque point de l'intensité du pôle d'une molécule sur celle du pôle contraire de la molécule suivante.

Le magnétisme, de même que l'électricité, réside donc entièrement à la surface extérieure des corps dépourvus de force coercitive, et par suite l'action d'un corps magnétique sur une aiguille aimantée doit être la même, que ce corps soit plein ou qu'il soit creux. C'est en effet ce qu'a constaté Barlow à l'aide de sphères pleines et creuses ; il a reconnu toutefois qu'une sphère creuse doit avoir une épaisseur d'au moins 1/10 de millimètre pour agir comme une sphère pleine.

Il convient d'ailleurs d'observer que les corps magné-

tiques ne sont jamais complètement dépourvus de force coercitive, et conservent toujours, après l'aimantation, quelques traces de magnétisme. De même, les aimants n'ont pas une force coercitive absolue, et, lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique, leur aimantation augmente ou diminue un peu suivant que l'action du champ produit un magnétisme de même sens ou de sens contraire à celui qu'ils possèdent.

179. *Magnétisme que peut prendre le fer doux.* — Le moment magnétique d'une longue tige placée dans un champ magnétique uniforme est proportionnel à sa longueur l, à sa section s, et dépend de l'intensité H, du champ. Il est proportionnel à cette intensité jusqu'à une certaine limite, et peut être représenté par $kHsl$, k étant un coefficient numérique qui dépend de la nature du corps magnétique (*).

Plucker a déduit d'expériences faites par Barlow les valeurs suivantes du coefficient k, qui ne sont qu'approximatives :

Pour le fer doux travaillé.	32.8
— le fer fondu	23
— l'acier mou.	21.5
— l'acier dur	17.4
— le nickel	15.3

Ainsi, un long barreau de fer doux placé horizontalement suivant la direction de l'aiguille de déclinaison prend, sous l'action du magnétisme terrestre, dont l'intensité à Paris est d'environ 1,9, un moment magnétique égal à $32{,}8 \times 1{,}9\, sl = 60{,}8\, sl$, les unités fondamentales étant le mètre et la masse du gramme.

(*) Hsl représente un moment magnétique, ainsi qu'on peut facilement s'en assurer en substituant à la place de H, de s et de l leurs dimensions; k est donc un coefficient numérique indépendant des unités fondamentales.

Si le barreau a un centimètre carré de section, le moment est $0{,}00608\,l$, et le magnétisme développé aux deux extrémités est 0,00608. Chacun de ses pôles attirerait un pôle semblable situé à une distance d'un millimètre avec une force égale à

$$\frac{(0{,}00608)^2}{(0{,}001)^2},$$

soit environ 36 unités absolues de force, ou 3,6 grammes, l'unité absolue étant égale à environ $0^{gr},1$ (n° 26).

Le même barreau placé parallèlement à l'aiguille d'inclinaison, prendrait un pôle magnétique égal à $32{,}8 \times 4{,}65 \times 0{,}0001 = 0{,}015$, et attirerait un pôle semblable distant d'un millimètre avec une force égale à $\frac{(0{,}015)^2}{(0{,}001)^2} = 225$ unités absolues de force, ou environ $22^{gr},5$.

180. Le coefficient k est constant seulement pour de faibles intensités du champ magnétique; il diminue lorsque l'intensité s'accroît et que l'on approche d'une certaine limite, qu'on nomme *limite de magnétisation*, qui n'est pas la même pour tous les corps magnétiques, et à partir de laquelle le produit $k\mathrm{H}$ reste constant.

La valeur maximum de $k\mathrm{H}$ pour le fer peut se déduire d'une expérience de Joule qui a trouvé pour l'attraction maximum qu'un électro-aimant, aimanté par un courant électrique, peut exercer sur son armature le chiffre de 14061 grammes par centimètre carré.

On peut en effet appliquer à l'attraction qui s'exerce entre la surface d'un aimant et son armature le calcul donné au n° 70 à propos de l'électromètre absolu de M. Thomson.

La force f avec laquelle la surface plane d'un électro-aimant agit sur la surface A d'une armature épaisse est,

en représentant par γ le magnétisme répandu sur l'unité de surface, ou l'intensité de magnétisation :

$$f = 2\pi A \gamma^2.$$

Supposons dans cette équation A égal à 1 centimètre carré et posons $f = 14061$ grammes $= 14061 \times 9,8$ ou 137890 unités absolues de force, on aura :

$$137\,890 = 2\pi \times 0,0001\gamma^2$$

ou

$$\gamma = \sqrt{\frac{137\,890}{2\pi \times 0,0001}} = 14\,900.$$

Ce chiffre représente la valeur maximum du produit kH pour le fer doux.

Si la valeur du coefficient k était constante, l'intensité du champ magnétique qui produirait le maximum d'aimantation du fer doux serait donnée par l'équation :

$$32,8H = 14\,900$$

ou

$$H = \frac{14\,900}{32,8} = 450.$$

Mais il résulte d'expériences faites par Muller que k doit seulement être considéré comme constant pour le fer lorsque l'intensité de magnétisation ne dépasse pas le quart de sa valeur maximum, soit $\frac{14900}{4}$, ou 3725. L'intensité du champ qui produit cette aimantation est $\frac{3725}{32,8}$ ou environ 112. Au delà de cette limite la valeur du coefficient k diminue peu à peu et devient à peine un tiers de la valeur ci-dessus, 32,8, lorsqu'on approche du point de saturation. Pour produire le maximum d'aimantation, il faudrait, selon Muller, un champ magnétique ayant une intensité égale à 1350, c'est-à-dire égale

à environ 300 fois celle du magnétisme terrestre, dont la valeur est environ 4,65.

Si les faces latérales d'un corps magnétique ne sont pas parallèles aux lignes de force du champ dans lequel il se trouve, le magnétisme libre ne s'accumule pas seulement aux extrémités, mais il se répand sur tout ou partie de la surface; c'est ce qui a lieu par exemple pour un corps magnétique de forme irrégulière situé dans un champ uniforme, ou encore pour un corps magnétique placé dans un champ dû à un ou plusieurs pôles et dont les lignes de force ne sont pas parallèles.

181. *Diamagnétisme.* — Certaines substances, nommées diamagnétiques, sont repoussées par les pôles des aimants, telles sont le bismuth, le mercure, le zinc, l'eau, etc. Placées dans un champ magnétique, des aiguilles formées de ces substances tendent à se placer normalement aux lignes de force.

On peut considérer le coefficient de magnétisation, k, qui s'applique à ces corps, comme négatif; sa valeur, qui a été déterminée pour un certain nombre d'entre eux, est d'ailleurs infiniment moindre que celle du coefficient qui correspond à la plupart des substances magnétiques, il est :

Pour l'eau.	-10.65×10^{-6}
Pour le mercure.	-33.5×10^{-6}
Pour le bismuth.	-250×10^{-6}

Le moment de rotation qui tend à faire tourner une aiguille de bismuth de longueur l et de section s, placée suivant la direction des forces magnétiques d'un champ H, est donc : -250×10^{-6} Hsl.

CHAPITRE IX.

ÉLECTRO-MAGNÉTISME.

Unité électro-magnétique d'intensité du courant.

182. *Action d'un courant sur un pôle magnétique.* — Un courant électrique agit sur les pôles d'un aimant placé dans son voisinage et par conséquent développe un champ magnétique. La loi élémentaire de cette action est la suivante : un élément de courant de longueur ds et d'intensité i produit sur un pôle magnétique d'intensité μ, situé à une distance r, une force normale au plan qui passe par le pôle magnétique et l'élément du courant, et dont la valeur est

$$f = \frac{K\mu i ds \sin\alpha}{r^2}. \qquad (2)$$

α étant l'angle qui forme l'élément de courant avec la ligne qui joint son centre au pôle magnétique μ, et K une constante.

Pour avoir la direction de la force on se suppose placé dans le courant de façon que le fluide positif marche des pieds à la tête, et à avoir les yeux fixés sur le pôle magnétique : si ce pôle est un pôle nord ou austral, c'est-à-dire si μ est positif, la force qui agit sur lui tend à le faire marcher de droite à gauche ; la force a une direction contraire si le pôle magnétique est sud ou boréal. L'action du pôle magnétique sur l'élément de courant est la même,

mais la force qui en résulte a naturellement une direction contraire.

La formule précédente n'est directement applicable que si la longueur de l'élément de courant ds est très petite par rapport à la distance qui le sépare du pôle magnétique. Pour obtenir l'action d'un courant quelconque, il faut le décomposer en éléments et chercher la résultante des forces développées par chacun d'eux.

Si le courant agit sur un aimant qui a plusieurs pôles, l'action résultante se déduit des forces qui agissent sur chacun des pôles de l'aimant.

Quant à l'action exercée par un pôle magnétique ou un aimant sur un courant, on l'obtient de même en calculant la résultante des diverses forces auxquelles sont soumis tous les éléments du courant.

Si l'unité d'intensité de courant et l'unité de pôle magnétique ont été préalablement fixées, le coefficient K se trouve déterminé. Pour avoir sa valeur, il suffit d'appliquer la formule à un cas particulier et de comparer l'action trouvée par le calcul, qui contient le coefficient K, à celle que donne l'expérience.

On peut aussi faire dans la formule $K = 1$; l'action de l'élément de courant ids sur le pôle magnétique μ devient alors

$$f = \frac{\mu i ds \sin \alpha}{r^2}.$$

Si l'unité d'intensité est fixée, on en tire l'unité de pôle magnétique, ou, réciproquement, si l'on adopte une unité pour le pôle magnétique, on déduit de la formule l'unité d'intensité de courant électrique. C'est cette dernière méthode qui a été adoptée d'abord par Wéber, puis par la commission de l'association britannique chargée

de fixer l'étalon de résistance. L'unité de pôle magnétique adoptée est celle de Gauss : c'est le pôle magnétique qui repousse un pôle d'égale intensité situé à l'unité de distance avec l'unité absolue de force (n° 164). Les unités électriques qu'on en déduit se nomment *unités électro-magnétiques.*

L'unité d'intensité ne peut être directement donnée par la formule (2), qui ne s'applique qu'à une longueur ds infiniment petite ; pour la déterminer il faut calculer l'action d'un courant de longueur finie et de forme connue sur un aimant. On peut y arriver de plusieurs manières qui conduisent à autant de définitions différentes de l'unité d'intensité.

Fig. 49.

X C D B A O X'

183. *Définitions de l'unité électro-magnétique d'intensité.* — Si l'on calcule la force à laquelle est soumis un pôle magnétique μ, situé en O (*fig.* 49), sous l'action d'un courant rectiligne XX' indéfini, ou du moins assez long pour pouvoir être considéré comme tel, d'intensité i et situé à une distance OA $= a$, on trouve facilement (*)

$$f = \frac{2i\mu}{r}.$$

(*) L'action df de l'élément de courant BC $= ds$ sur le pôle magnétique μ situé en O, à une distance OA $= r$ de la ligne XX', est, d'après la loi d'Ampère, $df = \frac{\mu i \, ds}{\text{OB}^2} \sin \text{OBX}$.

Menons la ligne BD, normale à OB, et représentons par θ l'angle

Quant à la direction de la force, elle dépend du sens du courant.

En faisant $f = 2$, $\mu = 1$ et $r = 1$ on a $i = 1$.

L'unité électro-magnétique d'intensité est donc « celle d'un courant rectiligne indéfini qui, en agissant sur l'unité de pôle magnétique situé à l'unité de distance, développerait une force égale à deux unités absolues de force ».

Supposons que le point O soit le centre d'un petit aimant, dirigé suivant OA, dont les pôles magnétiques soient $+\mu$ et $-\mu$, la longueur 2λ, et par conséquent le moment magnétique $2\mu\lambda$. Le courant XX' produira sur l'un des pôles une force égale à $\frac{2i\mu}{r-\lambda}$, et sur l'autre une force de direction contraire égale à $\frac{2i\mu}{r+\lambda}$. Ces deux orces donneront lieu à un couple dont le moment de rotation sera :

$$2i\mu\lambda\left(\frac{1}{r-\lambda}+\frac{1}{r+\lambda}\right)=\frac{4i\mu\lambda r}{r^2-\lambda^2},$$

BOA = DBX ; l'angle BOC est égal à $d\theta$ et l'on a les relations suivantes :

$$\sin \text{OBX} = \cos \text{BOA} = \cos\theta.$$

$$\text{OB} = \frac{r}{\cos\theta}$$

et
$$ds = \text{BC} = \frac{\text{BD}}{\cos\theta} = \frac{\text{OB}\,.\,d\theta}{\cos\theta} = \frac{r\,d\theta}{\cos^2\theta},$$

donc
$$df = \frac{\mu i \cos\theta\, d\theta}{r};$$

l'intégrale générale est :

$$f = \frac{\mu i \sin\theta}{r},$$

en prenant cette intégrale de $\theta = -90°$ et $\theta = +90°$, on a :

$$f = \frac{2\mu i}{r},$$

ou, si l'on suppose l'aimant assez éloigné du courant pour qu'on puisse négliger λ^2 devant r^2,

$$\frac{2i(2\mu\lambda)}{r}.$$

Ainsi, un courant rectiligne développe un champ magnétique dont les lignes de force sont des circonférences situées dans des plans normaux à la droite que parcourt le fluide électrique, et qui ont leur centre sur cette ligne. L'intensité du champ, h, a pour valeur en chaque point

$$h = \frac{2i}{r}.$$

Les plans qui passent par le courant sont normaux aux lignes de force, ce sont des surfaces équipotentielles. Le travail développé par l'unité de pôle magnétique, en passant d'un de ces plans à un autre, formant avec le premier un angle α, est $\frac{2i\mu}{r} \times r\alpha$ ou $2i\mu\alpha$. Le travail correspondant à un tour entier décrit par le pôle magnétique autour du courant serait :

$$4\pi i\mu.$$

Il convient d'observer qu'un pôle magnétique qui tourne autour d'un courant rectiligne se retrouve toujours dans la même situation, par rapport au courant, bien qu'un certain travail ait été produit.

Ce travail doit correspondre à une perte d'énergie, de là la nécessité des phénomènes d'induction sur lesquels nous reviendrons plus loin.

184. En faisant, dans la formule $f = \frac{\mu i ds \sin\alpha}{r^2}$, $\alpha = 90°$ on a :

$$f = \frac{\mu i ds}{r^2}.$$

Cette formule représente l'action d'un élément de courant ds sur un pôle magnétique μ, situé à une distance r sur une pependiculaire élevée au milieu de l'élément.

Si un courant décrit un arc de cercle de rayon r autour d'un pôle magnétique, chaque élément produit sur ce pôle une force semblable, normale au plan du cercle, et la résultante de ces forces, égale à leur somme, est

$$f = \frac{\mu i}{r^2}(ds + ds' + ds'' + \ldots)$$

ou

$$f = \frac{\mu i l}{r^2}.$$

en nommant l la longueur de l'arc.

En faisant $f = 1$, $\mu = 1$, $r = l = 1$, on a $i = 1$.

Ce qui fournit une seconde définition, qu'on donne souvent, de l'unité d'intensité : c'est celle d'un courant « qui parcourant un circuit d'une longueur égale à l'unité, recourbé en arc de cercle, et ayant l'unité de longueur pour rayon, produirait l'unité de force sur l'unité de pôle magnétique placé au centre du cercle ».

L'arc de cercle dont la longueur est égale au rayon correspond à un angle de $\frac{360}{2\pi}$ degrés ou de $57°\,18'\,23''$, soit environ $57°\,\frac{1}{4}$.

Un courant égal à l'unité, qui parcourrait une circonférence entière de rayon égal à l'unité de longueur, produirait sur l'unité de pôle situé à son centre une force égale à 2π ou à 6,28, et un courant d'intensité i, parcourant une circonférence de rayon r, agirait sur un pôle μ placé à son centre avec une force égale à :

$$\frac{2\pi\mu i}{r}.$$

Le couple qui tendrait à faire tourner un petit aimant, dont le moment serait $2\lambda\mu$, placé au centre de la circonférence et dans son plan serait :

$$\frac{2\pi i(2\lambda\mu)}{r}.$$

Si le fil conducteur du courant formait n tours sur la circonférence, le couple deviendrait :

$$\frac{2\pi n i(2\lambda\mu)}{r}.$$

185. la formule $f = \frac{\mu i ds \sin \alpha}{r^2}$ représente aussi l'action exercée par le pôle magnétique μ sur l'élément de courant ids situé à une distance r. $\frac{\mu}{r^2}$ est l'intensité du champ magnétique produit par ce pôle au point où se trouve l'élément de courant ds ; si l'on représente cette intensité par H, l'action devient $f = \mathrm{H}ids \sin \alpha$. Cette équation, qui est évidemment exacte quelle que soit l'origine du champ, conduit à une nouvelle définition de l'unité d'intensité.

Concevons un champ magnétique uniforme, comme celui de la terre dans un espace limité, d'intensité égale à H. et un courant normal aux lignes de force magnétique, auquel cas $\sin \alpha = 1$; l'action élémentaire devient $\mathrm{H}ids$, et la force, F, à laquelle est soumis un courant qui traverse un fil rectiligne de longueur l est :

$$\mathrm{F} = \mathrm{H}il.$$

En faisant $\mathrm{F} = 1$, $\mathrm{H} = 1$ et $l = 1$ on a : $i = 1$.

L'unité d'intensité est donc « celle du courant recti-

comme enveloppées de courants électriques, dont l'orientation dans le même sens constitue l'aimantation.

Le moment d'un solénoïde parcouru par un courant d'intensité i, et dont la longueur totale du fil conducteur, L, est donnée, dépend du nombre de tours que forme ce conducteur et de la surface enveloppée par les tours. La surface maximum qui correspond à un périmètre donné est le cercle, c'est donc celle qu'il convient d'adopter pour avoir l'effet magnétique maximum. D'un autre côté si n représente le nombre des tours, la surface de chacun d'eux est $\frac{L^2}{4\pi n^2}$ et le moment magnétique du solénoïde a pour valeur :

$$\frac{L^2 i}{4\pi n}.$$

Ce moment diminue lorsque le nombre des tours augmente; sa plus grande valeur correspond au cas où le fil est disposé de façon à former un seul tour; le moment est alors $\frac{L^2 i}{4\pi}$

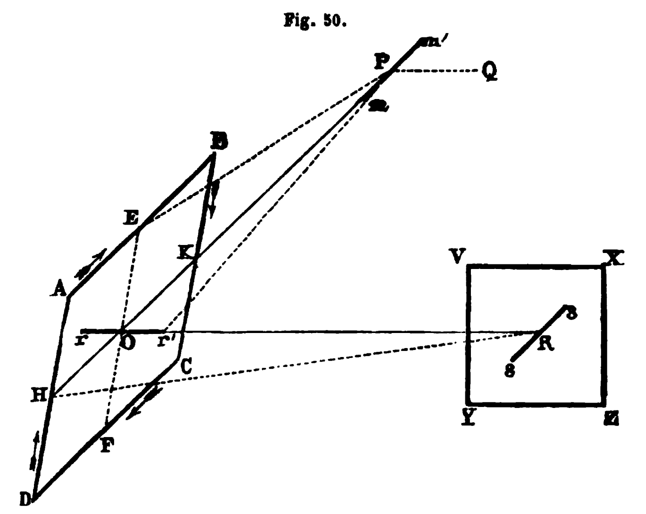
Quant aux pôles d'un solénoïde, c'est-à-dire aux points d'application des forces qu'exerce sur lui un champ magnétique uniforme, ils sont situés aux deux extrémités si les circonférences décrites par le fil conducteur sont égales et également espacées, mais il n'en est plus de même lorsque le rayon et l'espacement des tours du fil sont variables, et l'on peut en construire dont les pôles soient situés en des points quelconques fixés d'avance.

187. Enfin nous allons chercher, en appliquant encore la formule, $f = \frac{\mu i ds \sin\alpha}{r^2}$, l'action exercée par un courant fermé sur un pôle magnétique éloigné ou un aimant, en nous bornant à examiner deux cas : 1° celui

où le pôle magnétique est situé dans le plan du courant, 2° celui où il se trouve placé sur une normale à ce plan passant par le centre de gravité de la surface enveloppée par le courant. Pour simplifier, nous supposerons encore que le courant enveloppe un carré, ABCD (*fig.* 50) de côté AB$=a$.

Supposons d'abord le pôle magnétique sur lequel agit le courant situé en P à une distance OP $=$ D du centre du courant.

Fig. 50.



Le côté BC produit sur le pôle P une force dirigée suivant la normale PQ au plan BCP égale à $\frac{ai\mu}{\left(D-\frac{a}{2}\right)^2}$.

Le côté AD agit suivant une direction contraire avec une force égale à $\frac{ai\mu}{\left(D+\frac{a}{2}\right)^2}$.

Les deux côtés AB et DC développent deux forces égales, qui ont la même direction que la force due au

côté AD, et ont chacune pour valeur :

$$\frac{ai\mu \sin \mathrm{OPE}}{\overline{\mathrm{EP}}^2} = \frac{a^2 i\mu}{2\overline{\mathrm{EP}}^3} = \frac{a^2 i\mu}{2\left(\mathrm{D}^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Leur somme est $\dfrac{a^2 i\mu}{\left(\mathrm{D}^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

L'action totale du courant sur le pôle P a donc pour valeur :

$$ai\mu\left[\frac{1}{\left(\mathrm{D} - \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{1}{\left(\mathrm{D} + \frac{a}{2}\right)^2} - \frac{a}{\left(\mathrm{D}^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$$

$$= ai\mu\left[\frac{2a\mathrm{D}}{\left(\mathrm{D}^2 - \frac{a^2}{2}\right)^2} - \frac{a}{\left(\mathrm{D}^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}}\right].$$

En négligeant $\frac{a^2}{4}$ devant D^2 on trouve pour la force f à laquelle est soumis le pôle magnétique P :

$$f = \frac{a^2 i\mu}{\mathrm{D}^3},$$

ou plus généralement, si S est la surface enveloppée par le courant :

$$f = \frac{\mathrm{S}i\mu}{\mathrm{D}^3}.$$

Si l'on remplace le pôle magnétique P par un petit aimant *mm'* situé dans le plan du courant ABCD, ayant pour longueur 2λ et pour pôles magnétiques $+\mu$ et $-\mu$, il sera soumis à un moment de rotation autour de son centre P, dont la valeur C sera :

$$\mathrm{C} = \frac{\mathrm{S}i(2\lambda\mu)}{\mathrm{D}^3}.$$

En faisant $\mathrm{S} = 1$, $2\lambda\mu = 1$, $\mathrm{C} = \frac{1}{\mathrm{D}^3}$, on tire de cette

équation $i = 1$, ce qui conduit à une nouvelle définition de l'unité d'intensité, donnée par Weber : c'est celle « d'un courant fermé qui enveloppant une surface égale à l'unité et agissant sur un petit aimant situé dans son plan à une grande distance développerait sur cet aimant un moment de rotation égal à l'unité divisée par le cube de la distance. »

Supposons le courant fermé ABCD remplacé par un petit aimant rr', normal à son plan, passant par son centre O, et dont le moment magnétique soit $2\lambda'\mu'$; cet aimant produira sur la masse magnétique μ placée en P, une force dirigée suivant la ligne PQ, égale à

$$\frac{2\mu\mu' \sin \dot{O}Pr'}{D^2 + \lambda'^2} = \frac{2\mu\mu\lambda'}{(D^2 + \lambda'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

ou égale à $\frac{(2\mu'\lambda')\,\mu}{D^3}$ si l'on néglige λ'^2 devant D^2.

Le petit aimant rr' produirait sur un aimant mm', ayant son centre à la distance $OP = D$ et un moment égal à $2\mu\lambda$, un couple de rotation dont la valeur serait :

$$\frac{(2\mu'\lambda')(2\mu\lambda)}{D^3}.$$

L'action de l'aimant rr' sur le pôle magnétique P ou sur l'aimant mm' est donc la même que celle du courant ABCD si l'on a :

$$Si = 2\mu'\lambda'.$$

Cette équation peut encore servir à définir l'unité électro-magnétique d'intensité puisqu'en faisant $2\mu'\lambda' = 1$ et $S = 1$, on en déduit $i = 1$.

188. Supposons le pôle magnétique μ, sur lequel agit le courant ABCD (*fig.* 50), placé en R, sur une normale élevée au centre du courant. Les quatre côtés du carré ABCD

développent des actions égales, dont les composantes suivant la ligne RO s'ajoutent.

Le côté AD produit une force normale au plan ADR égale à $\frac{ai\mu}{\overline{HR}^2}$, dont la composante, suivant RO, est

$$\frac{ai\mu \sin \text{ORH}}{\overline{HR}^2} = \frac{a^2 i\mu}{2\overline{HR}^3} = \frac{a^2 i\mu}{2\left(D^2 + \frac{a^2}{4}\right)^{\frac{3}{2}}},$$

ou $\frac{a^2 i\mu}{2D^3}$, si l'on néglige $\frac{a^2}{4}$ devant D^2.

L'action des quatre côtés du carré, ou du courant fermé, est donc

$$\frac{2a^2 i\mu}{D^3},$$

ou plus généralement, si S est la surface enveloppée par le courant,

$$\frac{2Si\mu}{D^3}.$$

Le couple de rotation produit par le courant ABCD sur un petit aimant *ss*, situé dans un plan parallèle, ayant son centre en R et pour moment $2\lambda\mu$, serait :

$$\frac{2Si(2\lambda\mu)}{D^3}.$$

Ce moment est encore le même que celui qui serait dû à l'action d'un petit aimant *rr'* de moment $2\lambda'\mu'$ normal au courant ABCD, et tel que $Si = 2\lambda'\mu'$.

Ainsi l'action exercée par le courant ABCD sur l'aimant *ss*, parallèle à son plan, est double de celle qu'il exerce sur le même aimant *mm'* situé à la même distance mais dans son plan. Nous avons vu la même variation à l'occasion de l'action électro-dynamique des courants (n° 157) et de celle des aimants (n° 175).

Si, en conservant à l'aimant *mm'* une même direction on faisait tourner son centre autour de l'axe EF, on re-

connaîtrait facilement, en calculant le moment produit par le courant ABCD, que ce moment va en augmentant de la position *mm'* à la position *ss* où sa valeur est maximum.

189. ***Dimensions de l'unité électro-magnétique d'intensité.*** — Les dimensions de l'unité électro-magnétique d'intensité du courant se déduisent de l'une quelconque des définitions précédentes, qui naturellement conduisent au même résultat.

Prenons par exemple la formule du n° 183

$$f = \frac{\mu i l}{r^2},$$

qui donne la force à laquelle est soumise un pôle magnétique μ placé au centre d'un courant circulaire de longueur l, de rayon r et d'intensité i; on en tire :

$$i = \frac{r^2 f}{\mu l}.$$

Si l'on remplace l et r par l'unité de longueur L, l'intensité du pôle magnétique μ par l'unité de pôle N, et la force f par l'unité de force F, on trouve pour l'unité d'intensité, que nous représentons par I_m,

$$I_m = \frac{LF}{N},$$

ou, en remplaçant F et N par leurs dimensions (n°s 25 et 164), $F = \frac{LM}{T^2}$ et $N = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$:

$$I_m = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}.$$

Ces dimensions sont les mêmes que celles de l'unité électro-dynamique d'intensité (n° 159), et par conséquent la grandeur absolue de l'unité électro-magnétique d'intensité ne diffère de celle de l'unité électro-dynamique

que par un coefficient numérique indépendant des unités fondamentales adoptées.

Quant aux autres unités électro-magnétiques, leurs dimensions se déduisent facilement de la formule précédente, comme on l'a déjà vu pour les unités électro-dynamiques; nous y reviendrons plus tard.

190. ***Rapport entre l'unité électro-dynamique et l'unité électro-magnétique d'intensité.*** — On peut aisément trouver le rapport numérique qui existe entre l'unité électro-dynamique et l'unité électro-magnétique d'intensité.

On a vu (n° 157) que si un courant fermé de surface S et d'intensité i agit sur un autre courant de surface S′ et d'intensité i' placé à une grande distance dans un plan normal de façon que son centre se trouve sur une perpendiculaire élevée au centre du premier courant, le second est soumis à un couple qui, dans le système électro-dynamique, est égal à $\frac{SS'ii'}{D^3}$, ou à $\frac{SS'jj'}{D^3}$, en représentant, pour éviter les confusions, les intensités exprimées en unités électro-dynamiques par j et j′.

D'un autre côté, en adoptant les unités électro-magnétiques, le courant ABCD (*fig.* 50) développe sur l'aimant ss un moment de rotation égale à $2Si$ $(2\mu\lambda)$, et, ainsi qu'il a été dit au n° 185, un courant fermé tel que VXZY, placé dans un champ magnétique est soumis à la même action que l'aimant ss, normal à son plan, si le produit de la surface qu'il enveloppe, S′, par l'intensité du courant, i', est égal au moment, $2\mu\lambda$, de l'aimant.

Le couple qui agit sur le courant fermé VXZY exprimé en unités électro-magnétiques, est donc :

$$2SS'i'i'',$$

Ainsi, suivant qu'on emploie les unités électro-dyna-

miques ou les unités électro-magnétiques, le couple qui agit sur le courant VXZY est représenté par $SS'jj'$ ou par $2SS'ii'$, ou bien par $SS'j^2$ dans le premier cas et par $2SS'i^2$ dans le second si les courants qui traversent les deux circuits sont égaux.

On doit donc avoir :

$$j^2 = 2i^2 \quad \text{ou} \quad j = i\sqrt{2};$$

j représente le rapport entre l'intensité réelle d'un courant, A, et l'unité électro-dynamique d'intensité, J; i est le rapport entre la même grandeur, A, et l'unité électro-magnétique I. La formule précédente donne donc :

$$\frac{A}{J} = \frac{A}{I} \times \sqrt{2} \quad \text{ou} \quad I = J\sqrt{2}.$$

Ainsi l'unité électro-magnétique absolue est égale à l'unité électro-dynamique multipliée par $\sqrt{2}$.

On pourrait faire disparaître cette différence en prenant pour l'action d'un élément de courant sur un autre, la formule,

$$f = \frac{ii'dsds'}{l^2}(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha'),$$

qui est adoptée en Angleterre, au lieu de la formule ordinaire d'Ampère (n° 155),

$$f = \frac{ii'dsds'}{l^2}\left(\cos\omega - \frac{3}{2}\cos\alpha\cos\alpha'\right).$$

Les unités électro-magnétiques et électro-dynamiques seraient alors identiques.

Mesure électro-magnétique de l'intensité des courants en unités absolues.

191. *Boussole de tangentes.* — Lorsqu'on connaît la valeur exacte de l'intensité du magnétisme terrestre, on

peut obtenir directement celle d'un courant en unités électro-magnétiques absolues au moyen d'une boussole à cadre circulaire dont l'aiguille aimantée soit très petite par rapport aux dimensions du cadre.

Le courant développe sur les deux pôles de l'aiguille deux forces égales et de direction contraire, qui sont sensiblement normales au plan du cadre et dont l'expression est :

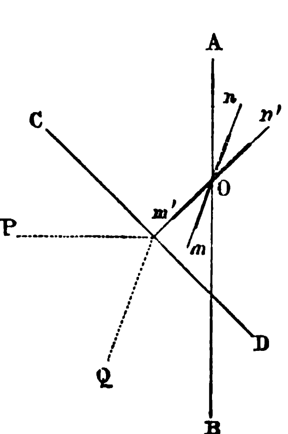
$$\frac{li\mu}{r^2},$$

i étant l'intensité du courant, μ celle du pôle magnétique de l'aiguille, l la longueur du fil enroulé sur le cadre, dont le rayon est r.

Sous l'influence de cette action et de celle du magnétisme terrestre, l'aiguille prend une position fixe dont l'angle avec le méridien constitue la déviation.

Soit AB (*fig.* 51) la projection du cadre, mn la position normale de l'aiguille sous l'influence du magnétisme terrestre, et $m'n'$ la position d'équilibre qu'elle prend lorsque le courant traverse le fil enroulé sur le cadre. Chacun des pôles de l'aiguille, m' par exemple, est soumis à deux forces : l'une due à l'action du courant dirigée suivant la normale m'P au plan du courant AB et sensiblement égale à $\frac{li\mu}{r^2}$, l'autre m'Q parallèle à la direction nm du magnétisme terrestre et égale à μh,

Fig. 51.



h étant la composante horizontale du champ magnétique de la terre (que nous avons représenté précédemment par la lettre h_1)

Pour que ces deux forces se fassent équilibre leurs composantes suivant la normale à l'aiguille CD doivent être égales, ce qui conduit à l'équation :

$$\frac{li\mu}{r^2}\cos Pm'C = h\mu \cos Qm'D,$$

ou, en représentant par α l'angle fixe mOB et par θ la déviation mOm', et remarquant que Pm'C $=$ m'OB $= \theta + \alpha$, et que Qm'D $= 90° - \theta$,

$$\frac{li\mu}{r^2}\cos(\theta + \alpha) = h\mu \sin\theta,$$

d'où

$$i = \frac{hr^2}{l}\,\frac{\sin\theta}{\cos(\theta + \alpha)}.$$

Si, comme on le fait ordinairement, on dispose le plan AB du conducteur dans la direction du méridien magnétique, $\alpha = 0$ et l'on a :

$$i = \frac{hr^2}{l}\,\text{tang}\,\theta.$$

Cette formule est indépendante du magnétisme μ de l'aiguille, mais elle contient l'intensité horizontale h du magnétisme terrestre. En admettant le chiffre 1,920 trouvé par MM. Cornu et Baille en 1870 pour l'intensité horizontale à Paris (n° 174), la formule donne :

$$i = \frac{1{,}920\, r^2}{l}\,\text{tang}\,\theta.$$

Lorque le fil enroulé sur le cadre forme un tour complet, on a $l = 2\pi r$ et par suite

$$i = \frac{hr}{2\pi}\,\text{tang}\,\theta = \frac{hr}{6{,}283}\,\text{tang}\,\theta$$

ou, en remplaçant h par sa valeur,

$$i = 0{,}302\, r \operatorname{tang} \theta.$$

Si l'on suppose $r = 1$ et $i = 1$,

$$\operatorname{tang} \theta = \frac{1}{0{,}302} = 3{,}31, \quad \text{d'où} \quad \theta = 73^\circ \tfrac{1}{2} \text{ environ};$$

le courant égal à l'unité absolue d'intensité (mètre, seconde et masse du gramme) donne donc avec une boussole de tangentes ayant un mètre de rayon et dont le fil forme un seul tour, une déviation de $73^\circ \frac{1}{2}$.

La formule $i = \frac{hr^2}{l} \operatorname{tang} \theta$ peut être appliquée aussi lorsque le fil forme plusieurs tours sur le cadre, mais à la condition que ce cadre n'ait qu'une faible largeur, que le nombre des tours superposés soit assez restreint, et qu'on prenne pour r le rayon moyen. Si n est le nombre de tours, $l = 2n\pi r$ et

$$i = \frac{hr}{2n\pi} \operatorname{tang} \theta.$$

L'aimant mobile doit avoir de très-petites dimensions; c'est ordinairement un petit parallélipipède suspendu à un fil sans torsion, contre lequel est collé un petit miroir qui réfléchit sur une échelle graduée l'image d'un point lumineux. La déviation de l'échelle donne directement la tangente de la déviation.

Le fil auquel est suspendue l'aiguille subit une torsion dont on peut tenir compte en déterminant par des expériences préalables son moment de torsion qui est très-faible et négligeable en général.

192. *Boussole de tangentes de M. Gaugain.* — M. Gaugain a été conduit par l'expérience à donner à la boussole de tangentes une forme un peu différente, qui

permet d'employer un aimant d'une certaine longueur. MM. Bravais et Jacobi ont vérifié par le calcul l'exactitude des résultats trouvés par M. Gaugain (*).

Dans cette boussole le point de suspension de l'aiguille, au lieu d'être placé au centre de la circonférence que parcourt le courant, se trouve situé sur une normale élevée au centre de cette circonférence, à une distance égale à la moitié du rayon.

En représentant le rayon par r, l'intensité du courant qui traverse le fil de la boussole est donnée par la formule :

$$i = \frac{hr}{2\pi}\left(\frac{5}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \operatorname{tang} \theta \quad \text{ou} \quad i = \frac{hr}{4,504} \operatorname{tang} \theta.$$

La déviation de l'aiguille de la boussole de M. Gaugain est naturellement moindre, pour un courant d'intensité donnée, que celle de l'aimant d'une boussole ordinaire de tangentes qui aurait le même rayon.

Si θ' est la déviation de la boussole de tangentes ordinaire pour un courant d'intensité i, on a, ainsi qu'on l'a vu plus haut :

$$i = \frac{hr}{6,283} \operatorname{tang} \theta',$$

et par suite :

$$\frac{\operatorname{tang} \theta'}{\operatorname{tang} \theta} = \frac{6,283}{4,504} = 1,39.$$

La boussole de M. Gaugain comprend ordinairement plusieurs tours de fil qui sont enroulés sur un tronc de cône, ou sur deux troncs de cône placés symétriquement par rapport au centre de l'aiguille, dont les génétrices forment avec l'axe un angle φ donné par la formule $\operatorname{tang} \varphi = 2$, d'où $\varphi = 63°26$.

Les indications de cette boussole sont d'autant plus

(*) Voir *Annales télégraphiques*, numéros de novembre-décembre 1859 et de mai-juin 1860.

exactes que l'aiguille aimantée est plus petite par rapport au rayon du cadre circulaire. Pour une aiguille dont la longueur est le cinquième du diamètre du cadre, la valeur de l'intensité est donnée à 1/300 près, en admettant que l'aiguille n'oppose aucune résistance au mouvement provenant de son mode de suspension ; l'approximation est de 1/600 si l'aiguille n'a pour longueur que le sixième du diamètre du cadre.

193. *Boussole de sinus.* — Le cadre qui entoure l'aiguille de la boussole de sinus est mobile. Lorsque le courant traverse le fil conducteur et fait dévier l'aiguille, on tourne le cadre en la suivant jusqu'à ce qu'elle s'arrête dans son plan.

Si le cadre est circulaire et l'aiguille très-petite, chaque pôle est soumis à une force normale à l'aiguille qui, en conservant les mêmes notations que précédemment, est égale à $\frac{li\mu}{r^2}$. L'action du magnétisme terrestre est, si θ est la déviation, c'est-à-dire l'angle dont on a tourné le cadre, $h\mu \sin\theta$. On a donc l'équation :

$$\frac{li\mu}{r^2} = h\mu \sin\theta \quad \text{ou} \quad i = \frac{hr^2}{l} \sin\theta.$$

Si le fil forme n tours

$$l = 2n\pi r \quad \text{et} \quad i = \frac{hr}{2n\pi} \sin\theta.$$

La plus grande valeur que puisse prendre θ est $\theta = 90°$, qui correspond à $i = \frac{h\mu r}{2\pi}$; si l'intensité du courant dépasse cette limite, il faut diminuer le nombre n des tours du fil sur le cadre.

Ordinairement la boussole de sinus ne sert qu'à comparer les intensités des courants ; le cadre n'a pas alors besoin d'être circulaire, et l'aiguille peut avoir de

grandes dimensions; on a simplement $i = k \sin \theta$, k étant une constante qui dépend de la forme de l'instrument.

194. *Galvanomètres ordinaires.* — Le cadre des galvanomètres employés dans la pratique n'est pas ordinairement circulaire, aussi ces instruments ne donnent-ils pas la valeur absolue de l'intensité du courant; ils ne peuvent même servir à comparer directement les intensités que lorsque la déviation est très-faible, à moins qu'ils ne soient préalablement gradués; cette graduation peut être réalisée par diverses méthodes.

Les résultats des observations obtenues avec une même boussole ou un même galvanomètre ne sont comparables qu'à la condition que la valeur de la composante horizontale du magnétisme terrestre soit constante. Or, l'intensité du magnétisme de notre globe subit en un même endroit des variations continues et sa valeur aux divers points de terre varie d'une manière notable, puisqu'elle peut passer de 1 à 1,70 et même à 2,5 (n° 172).

Les observations faites en divers lieux ou à des époques différentes ne sont donc rigoureusement comparables que si la grandeur absolue du magnétisme terrestre est connue pour chacune des expériences.

On pourrait se mettre à l'abri des variations du magnétisme terrestre en ramenant l'aiguille dans le plan du méridien magnétique, malgré le passage du courant, par la torsion d'un ou de deux fils soutenant l'aimant. La force à laquelle est soumise l'aiguille serait connue par l'angle de torsion; mais, pour en déduire l'intensité du courant, il faudrait mesurer son moment magnétique, qui varie avec la température et dont la détermination est assez délicate.

195. *Électro-dynamomètres.* — On peut se mettre à l'abri des variations du magnétisme de la terre et de celles

de l'aiguille en remplaçant cette dernière par une bobine mobile suspendue, soit par un fil unique, soit mieux encore au moyen d'une suspension bifilaire formée des deux fils métalliques par lesquels entre et sort le courant.

On a vu, n° 158, comment on peut opérer au moyen de deux bobines circulaires situées à une assez grande distance l'une de l'autre, dans des plans normaux, et dont une est fixe tandis que l'autre, préalablement orientée dans la direction du méridien magnétique, est suspendue par deux fils fins et par conséquent est mobile.

L'intensité exprimée en unités électro-dynamiques absolues, que nous représenterons par j, est :

$$j = \sqrt{\frac{\Delta D^3 \operatorname{tang} v}{nn'SS'}},$$

n et n' étant les nombres de tours du fil sur les bobines dont les sections moyennes sont S et S', D la distance des centres, Δ une constante qu'on peut déterminer par l'expérience et qui dépend de la masse de la bobine, de la nature, de la longueur et de l'écartement des deux fils de suspension, enfin v la déviation, ou la moyenne des déviations obtenues lorsque le courant traverse l'une des bobines dans les deux directions contraires.

On obtient l'intensité en unités électro-magnétiques, en remplaçant (n° 190) j par $i\sqrt{2}$ ce qui donne

$$i = \sqrt{\frac{\Delta D^3 \operatorname{tang} v}{2nn'SS'}}.$$

196. Dans l'électro-dynamomètre de Weber la bobine mobile est de petite dimension et est suspendue au centre d'une grosse bobine fixe par deux fils métalliques d'environ $0^m,50$ de longueur. A l'état de repos les axes des bobines sont perpendiculaires l'un à l'autre et celui

de la bobine mobile est placé dans le plan du méridien magnétique.

Si l'on fait passer le même courant dans les deux bobines, la petite dévie et prend une position d'équilibre, sous la triple action du couple électro-magnétique, de la torsion des fils et du magnétisme terrestre. On peut, comme il a déjà été dit, négliger l'action de la terre, qui est toujours très-faible, ou l'annuler en prenant la moyenne de deux déviations obtenues en changeant le sens du courant dans une des bobines.

La valeur du couple électro-magnétique se détermine facilement. On a vu en effet (n° 184) qu'une bobine de rayon R ayant n tours de fils parcourus par un courant d'intensité i, produit sur un petit aimant placé suivant son axe, ayant le même centre et dont le moment magnétique est $2\lambda\mu$ un couple de rotation égal à

$$\frac{2\pi ni(2\lambda\mu)}{R};$$

d'un autre côté, si l'on remplace le petit aimant par une bobine de n' tours de fils de rayon r que traverse le même courant i, cette dernière sera soumise à la même action si

$$2\lambda\mu = n'\pi r^2 i;$$

on a donc pour le moment de rotation :

$$\frac{2\pi^2 nn'r^2i^2}{R}.$$

Ce couple de rotation correspond au cas où la bobine est maintenue dans sa position normale, ce qu'on peut obtenir facilement en faisant tourner l'axe qui soutient les fils de suspension.

Lorsque la bobine dévie on peut admettre, en raison de ses petites dimensions, que la force, qui agit sur ses

pôles normalement au plan du cadre fixe, ne change pas sensiblement, surtout pour de faibles déviations.

Le couple qui agit sur l'aiguille est donc pour une déviation α :

$$\frac{2\pi^2 nn'r^2 i^2 \cos\alpha}{R}.$$

Quant au moment de rotation dû à la torsion des deux fils de suspension, il est, ainsi qu'on l'a vu (n° 158),

$$\Delta \sin\alpha.$$

Dans la situation d'équilibre on a donc :

$$\frac{2\pi^2 nn'r^2 i^2 \cos\alpha}{R} = \Delta \sin\alpha$$

d'où

$$i = \sqrt{\frac{\Delta R \operatorname{tang}\alpha}{2\pi^2 nn'r^2}}.$$

On aurait pu déduire directement cette formule de l'équation :

$$i = \sqrt{\frac{\Delta D^3 \operatorname{tang}\alpha}{nn'SS'}}$$

trouvée au n° 158, en remplaçant l'intensité, exprimée en unités électro-dynamiques dans cette équation par $i\sqrt{2}$, S et S' par πR^2 et πr^2, et en remarquant que D représente en réalité la distance d'un point de la circonférence du courant fixe au centre du courant mobile et devient égal au rayon de la bobine fixe, R, lorsque les circonférences sont concentriques et que la bobine mobile a un très petit diamètre.

197. Le terme Δ (*) peut se déterminer expérimenta-

(*) Δ a pour valeur, ainsi qu'il a été dit au n° 158, $\frac{ab}{l} \times \frac{P}{g}$. (Voir le *Traité d'électricité* de La Rive, tome III, note B, et le *Cours de physique* de Verdet, tome II.) Le calcul direct de ce terme présenterait des chances d'erreur qu'on évite en le déterminant par l'expérience.

lement par la méthode indiquée au n°s 171 et 173 pour la mesure du produit $2\lambda\mu \times h'$, du moment magnétique d'un aimant par la composante du magnétisme terrestre.

Gauss a démontré en effet que le moment de rotation auquel est soumis un corps suspendu par une suspension bifilaire, écarté de sa position d'équilibre, est sensiblement proportionnel au sinus de l'angle de déviation. L'action est analogue à celle de la pesanteur sur le pendule dont les lois sont applicables, Δ représentant ici le produit du poids du pendule par la distance du centre de gravité au point d'oscillation.

On a donc, si l'on fait osciller le système et si t est la durée d'un oscillation simple,

$$t = \pi\sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\Delta}} \quad \text{ou} \quad \Delta = \frac{\pi^2 \Sigma mr^2}{t^2}.$$

On évite le calcul du moment d'inertie Σmr^2 en opérant comme il a été dit à l'occasion des aimants (n° 173), c'est-à-dire en fixant sur une règle attachée à la bobine deux poids égaux, à des distances égales de part et d'autre du centre, en faisant osciller la bobine et en déterminant la durée des oscillations t_1 et t_2 qui correspondent à deux distances différentes a_1 et a_2.

On a ainsi, si q est la masse des deux poids :

$$\Delta = \frac{2\pi^2 q(a_2^2 - a_1^2)}{t_1^2 - t_2^2}.$$

La grandeur de Δ dépend des unités élémentaires adoptées, ses dimensions sont $\frac{ML^2}{T^2}$.

198. *Mesure électro-magnétique de l'intensité du magnétisme terrestre.* — L'intensité du magnétisme terrestre, qui se mesure habituellement à l'aide d'aimants par

la méthode indiquée précédemment (n° 174), peut aussi se déterminer au moyen d'un courant électrique.

En faisant traverser à un courant le fil d'une boussole de tangentes à cadre circulaire, on a pour la valeur absolue de l'intensité, si l'aiguille est de très petite dimension, en représentant par r le rayon du cadre :

$$i = \frac{hr \operatorname{tang} \theta}{2n\pi},$$

h étant la composante horizontale de magnétisme terrestre, n le nombre de tours du fil sur la boussole et θ la déviation.

On en tire :

$$\frac{i}{h} = \frac{r \operatorname{tang} \theta}{2n\pi},$$

qui donne le rapport de l'intensité du courant à la composante h.

D'un autre côté si l'on suspend un cadre circulaire entouré d'un fil conducteur dans le plan du méridien magnétique et si l'on fait passer le même courant, d'intensité i, dans le fil, le cadre dévie et prend une position d'équilibre sous l'influence du magnétisme terrestre et de la résistance des fils de suspension, le produit ih se déduit de l'angle de déviation.

Soit en effet m le nombre des tours du fil sur le cadre, et S la surface enveloppée par l'un deux, le moment magnétique de la bobine parcourue par le courant i est mSi ; le couple dû à la composante horizontale du magnétisme terrestre est $mSih$ lorsque l'axe de la bobine est normal au plan du méridien magnétique et $mSih \times \cos \beta$ lorsqu'il forme un angle β avec le plan méridien.

Le cadre étant suspendu au moyen de deux fils métalliques par lesquels entre et sort le courant, qui consti-

tuent une suspension bifilaire, le couple qui tend à le ramener à la position normale lorsqu'il dévie d'un angle β est égal à $\Delta \sin \beta$, Δ se déterminant comme il vient d'être dit au paragraphe précédent,

On a donc dans la position d'équilibre l'équation

$$mSih \cos \beta = \Delta \sin \beta,$$

qui donne

$$ih = \frac{\Delta}{mS} \operatorname{tang} \beta;$$

Connaissant le rapport $\frac{i}{h} = A$ et le produit $ih = B$, on en tire :

$$h = \sqrt{\frac{B}{A}} \quad \text{et} \quad i = \sqrt{AB}.$$

On a ainsi, en même temps que l'intensité horizontale du magnétisme terrestre h, la valeur absolue de l'intensité i du courant employé.

Cette méthode indiquée par Weber a été appliquée d'abord par M. Kohlrausch, puis en avril 1870 par MM. Cornu et Baille, qui ont déduit de plusieurs expériences la composante horizontale du magnétisme terrestre à Paris et sont arrivés au même chiffre, 1,920, que leur avait donné la méthode de Gauss (*).

Leur boussole de tangentes était formée de deux tours de fils enroulés sur une bobine en bois de $0^m,65$ de diamètre, au centre de laquelle était suspendu par un fil de soie un système de petites aiguilles aimantées portant un miroir, sur lequel se réfléchissait l'image d'un point lumineux. Quant au cadre, il se composait de 30 tours de fil fin recouvert, enroulé autour d'une lame métallique circulaire de $0^m,194$ de diamètre. Deux fils de cuivre fins et

(*) *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 20 juin 1870.

isolés de 1 mètre de hauteur et écartés de 5 millimètres servaient à la fois à conduire le courant et à suspendre bifilairement le cadre. On déterminait à l'avance le couple de torsion, Δ, en suspendant à une règle horizontale fixée au cadre, symétriquement par rapport à l'axe, deux poids égaux (de 100 grammes), à quatre distances successives espacées de 30 millimètres et en déterminant les durées d'oscillation.

Résistance à donner au fil des galvanomètres.

199. *Influence de la résistance des galvanomètres.* — Lorsqu'on introduit le fil d'un galvanomètre dans un circuit parcouru par un courant, sa résistance ainsi que l'intensité du courant sont modifiées. La déviation de l'aiguille ne fait connaître l'intensité du courant primitif que si la résistance du fil qui entoure le cadre est négligeable.

Lorsque cette condition n'est pas remplie, il faut, pour avoir l'intensité réelle, faire une seconde expérience, qui consiste, par exemple, à prendre de nouveau la déviation après avoir introduit une résistance additionnelle connue dans le circuit.

Soit E la force électro-motrice qui agit sur un circuit dont la résistance est R, et I l'intensité du courant qu'on veut mesurer, qui est donnée par la formule

$$I = \frac{E}{R}.$$

En introduisant le galvanomètre et mesurant, par la déviation de l'aiguille, l'intensité I_1 du courant, on a, en désignant par r la résistance du fil qui entoure le cadre,

$$I_1 = \frac{E}{R + r}.$$

Si l'on ajoute une résistance additionnelle connue ρ, et si I_2 est la nouvelle intensité donnée par le galvanomètre,

$$I_2 = \frac{E}{R + r + \rho};$$

de ces trois équations on déduit :

$$R = \frac{I_2(r + \rho) - I_1 r}{I_1 - I_2},$$

$$E = \frac{I_1 I_2 \rho}{I_1 - I_2},$$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{I_1 I_2 \rho}{I_2(r + \rho) - I_1 r}.$$

Pour que E soit exprimé en unités absolues, il est nécessaire que les résistances r et ρ, ainsi que les intensités I_1 et I_2, données par le galvanomètre, soient connues en unités absolues. Cette dernière condition n'est pas nécessaire pour la détermination de la résistance R, puisqu'il n'entre dans la formule que le rapport $\frac{I_1}{I_2}$; il suffit que le galvanomètre employé soit préalablement gradué ou qu'il donne directement ce rapport, comme le fait la boussole de sinus ordinaire. De même, pour la mesure de l'entensité I, il suffit de connaître le rapport $\frac{\rho}{r}$.

Quand on mesure l'intensité par une seule expérience, on trouve toujours, par suite de l'introduction du fil du galvanomètre, un chiffre plus faible que l'intensité réelle. La différence $I - I_1$ a pour valeur

$$I - I_1 = \frac{E}{R} - \frac{E}{R + r} = \frac{Er}{R(R + r)}.$$

Le rapport de l'erreur commise à l'intensité réelle, $\frac{E}{R}$, est $\frac{r}{R + r}$.

On a donc par une seule expérience l'intensité du courant avec une approximation donnée, $\frac{1}{\delta}$, si l'on a

$$\frac{r}{R+r} < \frac{1}{\delta}, \quad \text{ou} \quad r < \frac{R}{\delta - 1} < \frac{R}{\delta}.$$

Un galvanomètre donnera, par exemple, l'intensité du courant à $\frac{1}{100}$ près, si la résistance de son fil est inférieure au centième de la résistance extérieure.

200. Une autre méthode souvent employée pour obtenir l'intensité d'un courant consiste à relier les deux bornes du galvanomètre par un fil de résistance connue (en anglais *shunt*), de façon à former une dérivation.

Soit I_1 l'intensité du courant observée au galvanomètre, lorsqu'il est installé dans les conditions ordinaires dans le circuit,

$$I_1 = \frac{E}{R+r};$$

soit I_2 l'intensité du courant observée lorsqu'on établit une dérivation entre ses deux bornes au moyen d'un fil de résistance α,

$$I_2 = \frac{E\alpha}{Rr + R\alpha + \alpha r}.$$

De ces deux équations on tire les valeurs de E et de R, et par suite celle de l'intensité réelle du courant :

$$I = \frac{E}{R} = \frac{rI_1I_2}{\alpha(I_1 - I_2)}.$$

Si l'intensité I_1 était trop considérable pour pouvoir être mesurée exactement avec le galvanomètre, on pourrait introduire une nouvelle dérivation entre les bornes du galvanomètre à l'aide d'une seconde résistance α', ce qui conduirait à une nouvelle équation :

$$I_3 = \frac{E\alpha'}{Rr + R\alpha' + r\alpha'},$$

qui remplacerait l'équation

$$I_1 = \frac{E}{R + r}.$$

L'addition d'un fil de dérivation entre les bornes d'un galvanomètre permet d'employer le même instrument pour la mesure de courants dont les intensités sont très différentes, sans que la déviation dépasse 30 à 40 degrés, limite à partir de laquelle les variations du courant sont difficiles à observer.

201. Lorsque la résistance extérieure R est très grande par rapport à celle du galvanomètre r, on peut, dans la formule précédente,

$$I_2 = \frac{E\alpha}{Rr + R\alpha + r\alpha}$$

négliger au dénominateur r devant R; l'expression devient :

$$I_2 = \frac{E\alpha}{Rr + R\alpha} = \frac{\alpha}{r + \alpha} \times \frac{E}{R} = \frac{\alpha}{r + \alpha} \times I.$$

Le courant I_2 qui traverse le galvanomètre est une fraction, $\frac{\alpha}{r + \alpha}$, du courant à mesurer, I et l'on peut, en faisant varier la résistance α, maintenir la déviation dans les limites les plus convenables pour l'observation.

Afin de rendre les calculs plus simples on emploie, pour les dérivations, des fils dont la résistance est $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ de celle du fil de la bobine du galvanomètre, ce qui donne pour le rapport $\frac{\alpha}{r + \alpha}$: $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1,000}$, etc.

Pour faire une observation, on introduit celui des fils

de dérivation qui ramène la déviation dans les limites les plus convenables pour l'observation, et il suffit de multiplier par 10, 100, 1,000, etc., les indications de l'instrument pour avoir la véritable valeur de l'intensité.

Les fils de dérivation doivent être formés, autant que possible, du même métal que celui du galvanomètre, et être placés près de l'instrument pour se trouver sensiblement à la même température.

202. *Dimensions du fil d'un galvanomètre qui correspond au maximum d'effet sur l'aiguille.* — L'introduction du fil d'un galvanomètre diminue l'intensité du courant, et la diminution est d'autant plus grande que sa conductibilité spécifique est plus faible, que son diamètre est plus petit et que son développement est plus considérable. Il y a donc lieu, tout d'abord, d'adopter pour ce fil un métal très conducteur; celui qui est généralement employé est le cuivre, qu'on peut facilement étirer en fils d'un très petit diamètre. L'action sur l'aiguille aimantée augmente avec le nombre des tours du fil, mais, d'un autre côté, la résistance de ce dernier s'accroît avec sa longueur, et l'on comprend que, pour obtenir le maximum d'effet, il y ait une limite à adopter, limite qui dépend de la résistance extérieure, et dont on doit chercher à se rapprocher le plus possible lorsqu'on veut mesurer des courants d'une très faible intensité.

Dans la plupart des cas, il est vrai, on ne connaît pas exactement la résistance extérieure, mais on a presque toujours des données qui permettent de s'en faire une idée approximative.

203. Le fil recouvert, enroulé sur le cadre d'un galvanomètre ayant une section circulaire, ne peut occuper tout l'espace qui lui est consacré. Chaque section du fil de rayon a est égale à πa^2, et, si les spires sont parfaite-

ment superposées, occupe la surface d'un petit carré dont la surface est $4a^2$. Le rapport du volume occupé par le fil au volume total est donc : $\frac{\pi}{4} = 0,785$.

Lorsque les tours de chaque couche se logent dans les interstices de la couche précédente, la surface qui correspond à chaque section, πa^2, du fil est celle d'un hexagone régulier dont la surface est $2a^2\sqrt{3}$, et le rapport du volume du fil au volume total de la bobine est $\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 0,905$ (*).

Si U représente le volume total, le volume V du fil est donc : $V = 0,785\,U$ dans le premier cas, et $V = 0,905\,U$ dans le second. On adopte en général la première disposition qui est plus facile à obtenir, et souvent même on sépare les divers tours par une feuille très mince de gutta-percha ou de papier paraffiné, ce qui diminue encore le volume occupé par le fil. On a dans ce cas une approximation suffisante pour la pratique, en considérant l'épaisseur de l'enveloppe isolante du fil comme augmentée du quart de l'épaisseur de la feuille isolante.

On peut, en général, adopter pour les galvanomètres des dimensions quelconques, en s'arrêtant seulement à la limite à partir de laquelle les tours de fil conducteur ajoutés n'ont plus sur l'aiguille qu'un effet insignifiant. De plus, afin d'accroître leur sensibilité, on abandonne ordinairement la forme circulaire pour le cadre, et on le dispose de façon que les premiers tours soient aussi rapprochés que possible de l'aiguille, tout en lui laissant la place nécessaire pour se mouvoir librement. Quant à la déviation elle est alors marquée sur une échelle graduée

(*) *Annales télégraphiques*, numéro de Mai-Juin 1877.

par le déplacement de l'image d'un point lumineux fixe qui se réfléchit sur un petit miroir collé sur l'aiguille (*). Les déviations sont d'autant plus amplifiées que l'échelle est placée à une plus grande distance.

204. Supposons d'abord que le volume V, que doit occuper le fil sur le cadre, soit donné, que ce volume soit assez restreint pour que l'on puisse admettre que tous les tours aient la même action sur l'aiguille aimantée, et qu'on ne tienne pas compte de l'épaisseur de la couche isolante du fil. Un calcul bien connu permet de trouver, dans ce cas, le diamètre du fil à employer pour obtenir le maximum d'effet.

Soit l la longueur totale du fil et a son rayon, on a $V = \pi a^2 l$, et par suite $l = \frac{V}{\pi a^2}$.

Si h représente la conductibilité du métal employé, la résistance r du fil est

$$r = \frac{l}{\pi h a^2} = \frac{V}{\pi^2 h a^4}.$$

La résistance extérieure au galvanomètre étant représentée par R, celle de tout le circuit est :

$$R + r = R + \frac{l}{\pi h a^2},$$

et l'intensité du courant

$$I = \frac{E}{R + r} = \frac{E}{R + \frac{l}{\pi h a^2}}.$$

L'action, A, sur l'aiguille aimantée a pour valeur, en représentant par K une constante dépendant de la forme du cadre,

(*) Disposition analogue à celle qui a déjà été décrite à propos de l'électromètre de M. Thomson, n° 69.

$$A = KIl = \frac{KEl}{R + \frac{l}{\pi h a^2}},$$

ou, en remplaçant l par $\frac{V}{\pi a^2}$,

$$A = \frac{K\pi h E V a^2}{\pi^2 h R a^4 + V},$$

dont la valeur maximum, lorsque a varie, correspond au cas où

$$V = \pi^2 h R a^4 \quad \text{ou} \quad R = \frac{V}{\pi^2 h a^4} = r.$$

La résistance du fil de la bobine doit donc être égale à celle du circuit extérieur. L'intensité du courant est alors $\frac{E}{2R}$.

Lorsque cette condition est remplie, les valeurs de a et de l sont données par les formules

$$a^4 = \frac{V}{\pi^2 h R},$$
$$l^2 = VRh.$$

205. Dans le calcul précédent, il n'est pas tenu compte de l'épaisseur de l'enveloppe isolante du fil conducteur. Cette épaisseur peut être considérée comme indépendante du rayon du fil qu'elle recouvre; en la représentant par ε, le rayon du fil recouvert est $a + \varepsilon$, et le volume V correspondant à une longueur l, est :

$$V = \pi(a + \varepsilon)^2 l.$$

L'action A de la bobine sur l'aiguille est d'ailleurs, comme dans le cas précédent,

$$A = \frac{KEl}{R + r} = \frac{KEl}{R + \frac{l}{\pi h a^2}}.$$

En remplaçant l par la valeur tirée de l'équation ci-dessus,

$$l = \frac{V}{\pi(a+\varepsilon)^2},$$

on a :

$$A = \frac{K\pi h E V a^2}{\pi^2 h R a^2 (a+\varepsilon)^2 + V},$$

dont le maximum, lorsque a varie, correspond à

$$V = \pi^2 h R (a+\varepsilon) a^3 \text{ (*)}.$$

En remplaçant dans cette équation V par $\pi(a+\varepsilon)^2 l$ et $\frac{l}{\pi h a^2}$ par r, on est conduit à la relation :

$$\frac{a}{a+\varepsilon} = \frac{r}{R}.$$

La résistance r du fil du galvanomètre doit donc toujours être moindre que celle du conducteur extérieur R.

Pour trouver les valeurs de r, de a et de l, on a à résoudre les trois équations

$$V = \pi(a+\varepsilon)^2 l,$$

$$r = \frac{l}{\pi h a^2}$$

et

$$\frac{r}{R} = \frac{a}{a+\varepsilon}.$$

L'élimination de l et de r conduit à la relation

$$a^4 + \varepsilon a^3 = \frac{V}{\pi^2 h R}.$$

(*) On a en effet pour dérivée de A par rapport à a

$$\frac{dA}{da} = \frac{2K\pi h E V[aV - \pi^2 h R (a+\varepsilon) a^4]}{[\pi^2 h R a^2 (a+\varepsilon)^2 + V]^2}$$

qui donne, en égalant le numérateur à zéro,

$$V = \pi^2 h R (a+\varepsilon) a^3$$

(Voir *Annales télégraphiques*, numéro de Mai-Juin 1877).

qui remplace la formule $a^4 = \frac{V}{\pi^2 hR}$ correspondant au cas où l'épaisseur ϵ est nulle.

On conclut de l'équation précédente que le diamètre du fil doit être d'autant plus petit que l'épaisseur ϵ de la couche isolante est plus grande.

Quant aux valeurs de l et de r, elles sont données par des équations complètes du quatrième degré.

206. L'épaisseur ϵ de l'enveloppe isolante des fils employés pour la construction des bobines des électro-aimants et des galvanomètres est sensiblement égale à $0^{mm},04$: l'équation qui donne le rayon a du fil est donc

$$a^4 + 0,04a^3 = \frac{V}{\pi^2 hR}.$$

Dans cette formule, V, R et h doivent être exprimés en unités absolues, en prenant le millimètre pour unité de longueur. R peut être représenté par une longueur réduite de fil de même métal que le fil du galvanomètre, ayant, par exemple, pour longueur L, pour section S, et par suite pour résistance $R = \frac{L}{hS}$; le second terme de l'équation précédente devient alors

$$\frac{VS}{\pi^2 L},$$

et l'équation peut être ramenée à ne plus contenir que des unités de longueur.

Pour trouver a, on peut former, une fois pour toutes, un tableau donnant les diverses valeurs de l'expression $a^4 + 0,04\, a^3$ pour des valeurs croissantes de a; il suffit alors, dans chaque cas particulier, de chercher dans ce tableau le chiffre qui se rapproche le plus de la quantité

connue $\frac{V}{\pi^2 hR}$ ou $\frac{VS}{\pi^2 L}$. La valeur de a correspondante fait connaître le diamètre qu'il convient d'adopter.

On ne trouve dans le commerce qu'un certain nombre de fils de cuivre, et l'on doit se contenter de choisir le numéro dont le diamètre se rapproche le plus de celui qui produirait le maximum d'effet (*).

Si l'épaisseur ε du fil recouvert était proportionnelle au rayon a du fil, on aurait $\varepsilon = na$, et la valeur de A deviendrait

$$A = \frac{K\pi h E V a^2}{\pi^2 h R (1+n)^2 a^4 + V},$$

dont le maximum correspond à

$$V = \pi^2 h R (1+n)^2 a^4;$$

d'un autre côté, l'équation $V = \pi(a+\varepsilon)^2 l$ devient

$$V = \pi(1+n)^2 a^2 l.$$

En égalant ces deux valeurs de V, on est conduit à l'équation

$$\pi h R a^2 = l,$$

ou

$$R = \frac{l}{\pi h a^2} = r.$$

La résistance du fil du galvanomètre doit donc être égale

(*) Voici, d'après la jauge du commerce, le diamètre des fils de cuivre qu'on emploie en France pour la fabrication des galvanomètres et des électro-aimants :

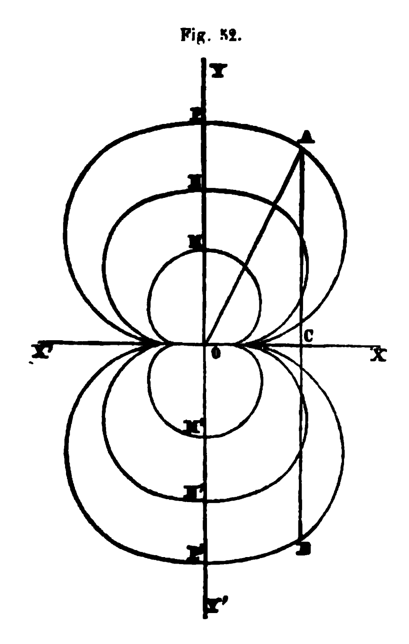
N° 16	diamètre en millimètres.	0,440
22	— —	0,320
24	— —	0,290
26	— —	0,260
28	— —	0,220
29	— —	0,210
30	— —	0,200
32	— —	0,170
33	— —	0,150
34	— —	0,140
36	— -	0,120

à celle du circuit extérieur, comme on pouvait s'y attendre, puisque l'enveloppe isolante produit dans ce cas le même effet qu'une diminution de la conductibilité du fil.

207. ***Forme à donner à la bobine des galvanomètres sensibles.*** — Les tours de fil d'un galvanomètre, alors même qu'ils ont le même rayon, ont évidemment d'autant moins d'action sur l'aiguille qu'ils sont plus éloignés du centre, et l'on comprend que si une longueur donnée de fil doit être enroulée sur le cadre, il y ait avantage à augmenter l'épaisseur de la bobine au centre, sauf à la diminuer à mesure que l'on s'en écarte.

Soit O (*fig.* 52) un des pôles de l'aiguille aimantée,

Fig. 52.



qu'on peut, en raison des faibles dimensions de cette

dernière, considérer comme placé au centre du cadre, et ACB la projection d'un tour situé à une distance AO du centre. Une longueur l de fil enroulé sur la circonférence projetée en ACB produit sur le pôle O une force dont la composante, suivant la normale OX au plan du courant, est, en désignant par ρ la distance OA et par ω l'angle AOX.

$$\frac{il \sin \omega}{\rho^2}.$$

Cette valeur est constante pour un même courant d'intensité i, tant que $\frac{\sin \omega}{\rho^2}$ ne change pas.

Construisons les courbes représentées en coordonnées polaires par l'équation

$$\frac{\sin \omega}{\rho^2} = a^2,$$

ou

$$\rho^2 = a^2 \sin \omega,$$

ou bien en coordonnées rectilignes, les axes étant XX' et YY', par l'équation

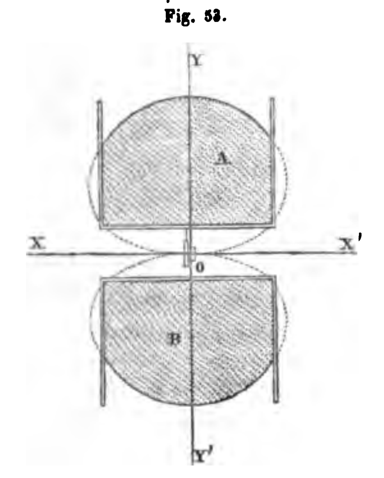
$$a^4 y^2 = (x^2 + y^2)^3,$$

en donnant à a diverses valeurs, et faisons tourner les courbes ainsi obtenues MM', NN', PP' autour de l'axe XX'; elles engendreront des surfaces de révolution telles qu'un fil de longueur donnée, enroulé sur chacune d'elles, exercera sur l'aiguille un effet constant, quelle que soit la partie de la surface sur laquelle aura lieu l'enroulement, et que la même longueur enroulée sur une autre surface, plus éloignée du centre, produira un effet moindre.

On doit donc, pour obtenir le maximum d'effet d'un galvanomètre avec une longeur donnée de fil recouvert, enrouler ce dernier sur le cadre en le disposant de façon

que la surface extérieure de la bobine coïncide avec l'une de ces surfaces, ce qui donne à l'instrument la forme de la *fig.* 53, dans laquelle AB représente la bobine et O

Fig. 53.



l'aimant mobile sur lequel est collé un petit miroir qui réfléchit l'image d'un point lumineux.

208. *Nombre de tours de fil enroulé sur le cadre qui produit le maximum d'effet.* — Lorsqu'on enroule sur le cadre d'un galvanomètre un fil dont la section est donnée, l'action des tours diminue à mesure qu'ils s'éloignent du centre, en même temps que leur résistance augmente; il y a donc une épaisseur de la bobine à adopter pour que l'action sur l'aimant central soit maximum.

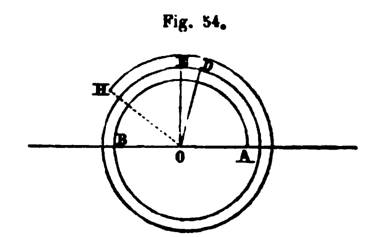
Pour trouver cette limite, qui dépend de la résistance extérieure, supposons le fil enroulé en spirale, ce qui n'ôte rien à la généralité du résultat (*).

Soient k et s la conductibilité et la section du fil enroulé sur le cadre, b la distance de deux spires, égale au dia-

(*) Voir l'article publié par M. Vaschy dans les *Annales télégraphiques*, numéro de Mars-Avril 1879.

mètre du fil recouvert et a la distance OA (*fig.* 54) du centre au point de départ de ce dernier sur le cadre.

Fig. 54.



On a pour la distance d'un point quelconque D au centre O, en représentant par ω l'angle qui correspond à ce point, compté depuis l'origine A :

$$\rho = a + \frac{b\omega}{2\pi} = a\left(1 + \frac{b}{a}\frac{\omega}{2\pi}\right).$$

La longueur d'une petite portion du fil, DE, correspondant à un angle DOE $= d\omega$ est $\rho d\omega$, et sa résistance

$$\frac{\rho d\omega}{ks}.$$

La résistance du conducteur depuis l'origine A jusqu'en un point quelconque H est, en nommant ω_1 l'angle décrit par le rayon vecteur de OA à OH (*) :

$$\frac{a}{ks}\left(\omega_1 + \frac{b}{a}\frac{\omega_1^2}{4\pi}\right).$$

(*) La longueur de l'arc est donnée par la formule

$$\int_0^{\omega_1} \rho\, d\omega = \int_0^{\omega_1} a\left(1 + \frac{b}{a}\frac{\omega}{2\pi}\right)d\omega = a\left(\omega_1 + \frac{b}{a}\frac{\omega_1^2}{4\pi}\right);$$

la résistance est

$$\frac{a}{ks}\left(\omega_1 + \frac{b}{a}\frac{\omega_1^2}{4\pi}\right).$$

Cette formule peut du reste s'obtenir directement sans intégration, car les résistances des tours suivent une progression arithmétique.

Si le fil forme x tours, $\omega_1 = 2\pi x$, et la résistance a pour valeur :

$$\frac{a\pi}{ks}\left(2x + \frac{b}{a}x^2\right).$$

Enfin, si le nombre des tours de même rayon enroulés sur le cadre est égal à m, la largeur du cadre étant, par conséquent, $2mb$, la résistance r du fil du galvanomètre devient (*) :

$$r = \frac{ma\pi}{ks}\left(2x + \frac{b}{a}x^2\right).$$

La résistance totale est donc :

$$R + r = R + \frac{ma\pi}{ks}\left(2x + \frac{b}{a}x^2\right),$$

et l'intensité du courant :

$$i = \frac{E}{R + r} = \frac{E}{R + \frac{ma\pi}{ks}\left(2x + \frac{b}{a}x^2\right)}.$$

L'action d'un élément $DE = dl$ sur le pôle magnétique situé en O est proportionnelle à $\frac{idl}{\rho^2}$ ou à $\frac{id\omega}{\rho}$, ou enfin en remplaçant ρ par sa valeur, à

$$\frac{id\omega}{a\left(1 + \frac{b}{a}\frac{\omega}{2\pi}\right)}.$$

L'intégrale de cette expression depuis $\omega = 0$ jusqu'à $\omega = \omega_1$ multipliée par l'intensité μ du pôle magnétique donne l'action d'une rangée de tours superposés. Cette intégrale est :

$$\frac{2\pi i}{b} \text{Log. nép.} \left(1 + \frac{b}{a}\frac{\omega_1}{2\pi}\right).$$

(*) Nous supposons que les tours de même rayon ont une même action sur l'aiguille, ce qui, ainsi qu'on l'a vu, n'est exact que lorsque le cadre est étroit.

En remplaçant comme plus haut $\frac{\omega_1}{2\pi}$ par x, et en multipliant l'expression par le nombre m de tours juxtaposés, on a, pour l'action A du cadre sur le pôle magnétiqne (*) :

$$A = \frac{2\pi\mu m i}{b} L\left(1 + \frac{b}{a} x\right),$$

ou enfin, si à la place de i on substitue la valeur trouvée plus haut :

$$A = \frac{2\pi\mu m E}{b} \times \frac{L\left(1 + \frac{b}{a} x\right)}{R + \frac{m a \pi}{k s}\left(2x + \frac{b}{a} x^2\right)}$$

qu'il faut rendre maximum en faisant varier x.

Cette valeur maximum correspond au cas où l'on a

$$2\left(1 + \frac{b}{a} x\right)^2 L\left(1 + \frac{b}{a} x\right) - \left(\frac{2b}{a} x + \frac{b^2}{a^2} x^2\right) - \frac{Rksb}{m\pi a^2} = 0 \text{ (**)}.$$

Si l'on remarque que $\frac{2b}{a} + \frac{b^2}{a^2} x^2 = (1 + \frac{b}{a} x)^2 - 1$, que $2L\left(1 + \frac{b}{a} x\right) = L\left(1 + \frac{b}{a} x\right)^2$, que $1 = Le$, et si l'on divise les deux termes de l'équation par e, e étant la base des logarithmes népériens, égale à 2,71828, il vient :

$$\frac{\left(1 + \frac{b}{a} x\right)^2}{e} L \frac{\left(1 + \frac{b}{a} x\right)^2}{e} = \frac{\frac{Rksb}{m\pi a^2} - 1}{e}.$$

Le second membre est une quantité connue; en le re-

(*) On a en effet pour l'intégrale ci-dessus

$$\frac{i}{a}\int_0^{\omega_1} \frac{d\omega}{1 + \frac{b}{a}\frac{\omega}{2\pi}} = \frac{2\pi i}{b} \text{Log nép.}\left(1 + \frac{b}{a} \times \frac{\omega_1}{2\pi}\right).$$

(**) Cette équation s'obtient en égalant à zéro le dérivé de A par rapport à x.

présentant par M, et en posant

$$\left(1 + \frac{b}{a} x\right)^2 = eu,$$

l'équation devient :

$$u\text{L}u = \text{M}.$$

On pourrait construire un tableau donnant $u\text{L}u$, ou, en prenant les logarithmes ordinaires, $\frac{u \log u}{0,434}$, pour des valeurs croissantes et assez rapprochées de u de façon à n'avoir qu'à chercher, dans chaque cas particulier, la valeur qui se rapproche le plus de M. De la valeur de u correspondante, on déduirait celle de x

$$x = (\sqrt{eu} - 1) \frac{a}{b}.$$

209. Lorsque $\text{M} = 0$, c'est-à-dire lorsque $\frac{\text{R}ksb}{m\pi a^2} = 1$, l'équation se réduit à $\text{L}u = 0$, d'où $u = 1$; on a alors

$$x = (\sqrt{e} - 1)\frac{a}{b} = 0,648 \frac{a}{b}.$$

Supposons, par exemple, que le cadre ait un décimètre de diamètre, que le fil qui entoure l'aiguille ait $0^{mm},22$ de diamètre (n° 28 de la jauge, p. 228), et que l'épaisseur de l'enveloppe isolante soit de $0^{mm},04$, ce qui donne pour le diamètre total du fil $0^{mm},3$; on aura $a = 50^{mm}$, et $b = 0^{mm},15$. Le nombre de tours donné par la formule sera : $x = 0,648 \times \frac{50}{0,15} = 216$; l'épaisseur de la couche du fil correspondant au maximum sera $216 \times 0^{mm},3$ ou $64^{mm},8$.

La résistance extérieure R qui correspond à ce cas est

$$\text{R} = \frac{m\pi a^2}{ksb}.$$

Si la résistance R est égale à celle d'un fil de cuivre de longueur l de même section et de même conductibilité que le fil du galvanomètre, auquel cas $R = \frac{l}{ks}$, on aura

$$l = \frac{m\pi a^2}{b} = m\pi \frac{50^2}{0,15} = m \times 52.330^{mm} = m \times 52^m,33.$$

Supposons que le cadre ait 5 centimètres de largeur, chaque rangée contiendra un nombre de tours m, égal à $\frac{50}{0,15} = 166$, ce qui conduit à $l = 8.680$ mètres.

Si la résistance extérieure était fournie par un fil de fer de $0^{mm},04$ de diamètre, la longueur L de ce fil équivalente à l serait

$$L = lk\left(\frac{4}{0,22}\right)^2,$$

k étant la conductibilité du fer par rapport au cuivre, qui est d'environ $\frac{1}{7}$. On aurait donc

$$L' = l \times 47 = 407.960 \text{ mètres},$$

soit environ 408 kilomètres.

210. *Variation du diamètre du fil.* — On peut enfin faire varier le diamètre du fil qui entoure le cadre d'un galvanomètre, de façon à diminuer sa résistance à mesure qu'il s'éloigne de l'aiguille. Nous allons chercher la loi de la variation à adopter pour obtenir le maximum d'effet (*), et nous supposerons, pour simplifier, que le cadre soit assez étroit pour que tous les tours de même rayon aient une action identique.

(*) Voir *Traité d'électricité et de magnétisme* de M. Maxwell, t. II, n° 718.

Considérons dans la bobine le volume engendré par la révolution, autour de l'axe, d'une petite surface, et supposons que, sans toucher au reste de la bobine, on fasse varier la dimension du fil dans l'anneau ainsi obtenu ; nous allons chercher la condition à remplir pour obtenir le maximum d'effet.

L'action sur l'aiguille d'un courant d'intensité i qui traverse le galvanomètre peut être représentée par $i\,(G + g)$, G se rapportant à la partie principale de la bobine, que nous considérons comme fixe, et g à la partie variable. g dépend de la position de l'anneau par rapport à l'aiguille, et varie avec le nombre des tours de fil que contient cet anneau ; sa valeur est par conséquent une fonction du rayon de ce fil, rayon que nous représenterons par y.

L'intensité du courant a pour expression $i = \frac{E}{R + r + r_1}$, E étant la force électro-motrice, R la résistance extérieure, r celle de la partie fixe de la bobine et r_1 celle de la partie variable, qui est aussi fonction du rayon y du fil. L'action A sur l'aiguille est donc :

$$A = \frac{E(G + g)}{R + r + r_1}.$$

g et r_1 sont seuls variables dans cette expression, qu'il faut rendre maximum en faisant varier le rayon y du fil enroulé dans l'espace annulaire considéré.

Pour obtenir l'équation de condition, il suffit d'égaler à zéro la dérivée de A par rapport à y, ce qui conduit à l'équation

$$(R + r + r_1)\frac{dg}{dy} - (G + g)\frac{dr_1}{dy} = 0$$

ou

$$\frac{\frac{dg}{dy}}{\frac{dr_1}{dy}} = \frac{G+g}{R+r+r_1}.$$

Représentons par B la petite surface qui engendre l'espace annulaire (*), par x sa distance du centre du galvanomètre et par Y le rayon du fil recouvert de son enveloppe isolante, Y étant une fonction de y qui dépend de la manière dont le fil est recouvert : on aura pour le nombre de tours contenus dans l'anneau engendré par B : $\frac{B}{\pi Y^2}$, et pour la valeur de g :

$$g = \frac{2\pi x}{x^2} \times \frac{B}{\pi Y^2} = \frac{2B}{Y^2 x}.$$

Quant à la résistance r_1, elle est, en désignant par k la conductibilité du métal employé,

$$r_1 = \frac{\frac{B}{\pi Y^2} \times 2\pi x}{k\pi y^2} = \frac{2Bx}{k\pi Y^2 y^2}.$$

On déduit de ces deux expressions :

$$\frac{dg}{dy} = -\frac{4B}{xY^3}\frac{dY}{dy},$$
$$\frac{dr_1}{dy} = -\frac{4Bx}{k\pi y^2 Y^2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{Y}\frac{dY}{dy}\right),$$

et par suite l'équation de condition devient :

$$\frac{k\pi y^2}{x^2} \times \frac{\frac{dY}{dy}}{\left(\frac{Y}{y} + \frac{dY}{dy}\right)} = \frac{G+g}{R+r+r_1},$$

(*) Ou plutôt cette surface multipliée par $\frac{\pi}{4}$ ou par $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ (n° 202).

ou

$$\frac{x^2}{k\pi y^2}\left(\frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}+1\right)=\frac{R+r+r_1}{G+g}.$$

r_1 et g peuvent être considérés comme très petits et négligeables devant $R+r$ et G, et par suite le second membre de l'équation est constant, et l'on peut poser

$$\frac{x^2}{y^2}\left(\frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}+1\right)=C,$$

C étant une constante. A la limite cette équation est rigoureusement exacte.

211. Si l'enveloppe isolante a une épaisseur ε, indépendante du diamètre du fil,

$$Y=y+\varepsilon \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dY}=1;$$

l'équation devient alors

$$\frac{x^2}{y^2}\left(2+\frac{\varepsilon}{y}\right)=C.$$

Le rayon y du fil doit donc croître avec x, mais dans une proportion moins forte.

Supposons que l'épaisseur de l'enveloppe isolante soit négligeable ou proportionnelle au rayon du fil, on aura :

$$\frac{Y}{y}=\frac{dY}{dy} \quad \text{et} \quad \frac{Y}{y}\frac{dy}{dY}=1,$$

et par conséquent l'équation se réduit à

$$\frac{2x^2}{y^2}=C \quad \text{ou} \quad \frac{y}{x}=\alpha,$$

α étant une constante.

Le diamètre du fil conducteur, y, doit dans ce cas croître proportionnellement au rayon, x, de la circonférence sur laquelle il est enroulé.

Supposons qu'on adopte cette dernière combinaison, et calculons la valeur de G et de r.

Il suffit de remplacer, dans les équations $g = \frac{2B}{Y^2 x}$ et $r_1 = \frac{2Bx}{k\pi Y^2 y^2}$, g et r_1 par dG et dr, y par αx, Y par βy ou $\alpha\beta x$, β étant le rapport du diamètre du fil recouvert à celui du fil nu, ce qui conduit à :

$$dG = \frac{2B}{\alpha^2\beta^2 x^3} \quad \text{et} \quad dr = \frac{2B}{k\pi\alpha^4\beta^2 x^3}.$$

Enfin, dans le cas que nous avons supposé, où la bobine est cylindrique et où tous les tours de fil de même rayon ont la même action sur l'aimant, on peut remplacer B par la surface comprise entre deux parallèles à l'axe de la bobine situées à des distances très voisines x et $x + dx$, et égale par conséquent à $N dx$, N étant la longueur de la bobine.

Les valeurs de dG et de dr deviennent alors :

$$dG = \frac{2N dx}{\alpha^2\beta^2 x^3},$$
$$dr = \frac{2N dx}{k\pi\alpha^4\beta^2 x^3}.$$

d'où on tire les intégrales

$$G = \frac{N}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right),$$
$$r = \frac{N}{k\pi\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right).$$

a étant une constante qui dépend de l'espace libre laissé autour de l'aimant, et x_1 le rayon du tour le plus éloigné du centre du galvanomètre.

On en déduit pour la force, M, qui agit sur l'aiguille :

$$M = \frac{E \times \frac{N}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)}{R + \frac{N}{k\pi\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)}.$$

Supposons que l'espace occupé par le fil restant constant, on fasse varier le rapport $\frac{y}{x} = \alpha$, la valeur de M changera et son maximum correspondra au cas où

$$R = \frac{N}{k\pi\alpha^4\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right), \quad (*)$$

c'est-à-dire au cas où

$$R = r.$$

En remplaçant $\frac{1}{\alpha^2}$ par u, dans la formule qui donne la valeur de M, elle prend en effet la forme bien connue $\frac{u}{A + u^2}$, dont le maximum, lorsque u varie seul, correspond à $u^2 = A$.

On arrive donc à ce résultat remarquable que la résistance du fil conducteur du galvanomètre doit être égale à celle du circuit extérieur, comme dans le cas où le fil a une section constante et où tous les tours ont la même action.

Le rapport $\frac{y}{x} = \alpha$ qui convient dans chaque cas particulier peut se déduire de l'équation précédente qui donne en effet

$$\alpha^4 = \frac{N}{k\pi\beta^2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right) \times \frac{1}{R}.$$

L'action sur l'aiguille du galvanomètre est, lorsque cette condition est remplie :

(*) Voir l'article publié par MM. Ayrton et John Perry dans le *Journal of The Society of telegraph Engineers*, n° XXIII.

$$M = \frac{G}{2r} = \frac{k\pi\alpha^2 E}{2} = \frac{E}{2\beta}\sqrt{\frac{k\pi N}{R}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)}.$$

Elle augmente en même temps que x_1, mais l'influence de l'accroissement des dimensions du cadre diminue à mesure que le rayon x_1 devient plus grand. La limite de M est :

$$M = \frac{E}{2\beta a}\sqrt{\frac{k\pi N}{R}}.$$

212. Dans le calcul précédent, nous avons supposé le cadre assez étroit pour qu'on pût considérer tous les tours du fil de même rayon comme ayant une même action sur l'aiguille ; mais en réalité il n'en est pas ainsi et on a vu (n° 207) qu'une longueur donnée de fil parcourue par un courant, pour produire un effet constant sur l'aimant d'un galvanomètre, doit être enroulée à des distances différentes de l'axe, sur une des surfaces de révolution engendrée, par la révolution des courbes de la figure 52, qui sont données par l'équation

$$\rho^2 = a^2 \sin \omega.$$

Le fil enroulé sur chacune de ces surfaces agissant de même, à longueur égale, sur l'aiguille, doit avoir la même section ; de plus, le calcul que nous venons de faire pour obtenir le diamètre du fil, s'applique au cas où l'on considère le fil enroulé sur la partie médiane de la bobine, en MM', NN', PP' (*fig.* 52).

La loi du diamètre du fil s'applique donc à chacune des couches de la bobine comprises entre deux surfaces voisines engendrées par les courbes que donne l'équation $\rho^2 = \alpha^2 \sin \omega$, et ce diamètre doit être proportionnel au rayon de la surface qui correspond à l'axe OY, c'est-à-dire à OM, ON, OP, etc.

On peut aussi démontrer que ce maximum correspond,

comme dans le cas où l'on considère un cadre étroit, au cas où la résistance de la bobine est égale à la résistance extérieure.

On ne peut songer dans la pratique à faire varier d'une manière continue le diamètre du fil qui entoure l'aiguille d'un galvanomètre, et l'on se contente de former le conducteur de plusieurs fils de diamètres différents en commençant par le plus fin, et en se rapprochant le plus possible de la loi précédente. C'est ainsi que sont construits les galvanomètres très sensibles destinés à observer les courants produits par de faibles forces électromotrices.

Mesure électro-magnétique des courants instantanés.

213. Lorsqu'un courant instantané, tel que celui qui est produit par la décharge d'une bouteille de Leyde ou dans certains cas par l'induction, traverse le fil d'un galvanomètre, il n'agit sur l'aiguille aimantée que pendant un instant extrêmement court, et par conséquent ne produit pas de déviation permanente. Sous cette action, l'aiguille est brusquement écartée de sa position d'équilibre et décrit une série d'oscillations qui décroissent peu à peu par l'effet des frottements et de la résistance de l'air.

On peut cependant, de l'angle que décrit l'aiguille pendant la première oscillation, déduire la quantité d'électricité qui a traversé le galvanomètre, comme on déduit de l'angle décrit par le pendule balistique la quantité de mouvement du projectile qui l'a frappé.

Lorsqu'un courant constant d'intensité I passe à travers le fil d'un galvanomètre, dont l'aiguille est maintenue

dans le plan du cadre, chacun des pôles est soumis à une force égale à

$$N\mu I,$$

μ étant la quantité de magnétisme libre à chaque pôle de l'aiguille et N une constante qui dépend de la forme du galvanomètre et du nombre de tours de fil.

Lorsque le cadre est circulaire et l'aiguille assez petite, la valeur de N est, ainsi qu'on l'a vu (n° 191) :

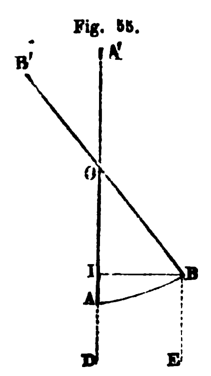
$$\frac{l}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2n\pi}{r},$$

l étant la longueur du fil, n le nombre de tours qu'il décrit autour de l'aiguille et r le rayon du cadre.

Si le courant ne passe que pendant un instant très court t, la quantité de mouvement qu'il communique à l'aiguille est $N\mu it$, ou $N\mu Q$, Q représentant la quantité d'électricité qui traverse le fil ; l'intensité peut d'ailleurs être constante ou variable pendant le très petit intervalle de temps que dure le mouvement électrique.

Si l'aiguille aimantée A'oA (*fig.* 55) est mobile, elle dévie rapidement et parcourt un certain angle AOB ; puis elle revient sur ses pas sous l'action du magnétisme terrestre et décrit une série d'oscillations autour de sa position de repos. L'aiguille étant soumise à une force constante et de direction invariable, on peut appliquer à son mouvement les lois du pendule.

Fig. 55.



La quantité de mouvement qu'elle possède au moment où, après une demi-oscillation, elle repasse par la position de repos,

est égale à celle qui lui avait été communiquée, ou à $N\mu Q$.

On a une autre expression de cette quantité de mouvement lorsqu'on connaît l'angle $AOB = \alpha$ décrit par l'aiguille, dont les deux pôles sont soumis à deux forces constantes contraires parallèles à AD, et égales à μh, h représentant la composante horizontale du magnétisme terrestre.

Supposons que l'aiguille constitue un pendule simple de masse M, de longueur l, et dont le pôle soit situé à l'extrémité, on aura pour cette quantité de mouvement (*)

$$Mv = \sqrt{2\mu h M \times IA},$$

IA étant la projection de l'arc AB sur OA ; or

$$IA = l(1 - \cos\alpha) = 2l \sin^2 \frac{1}{2}\alpha,$$

on a donc :

$$Mv = 2 \sin \frac{1}{2}\alpha \sqrt{\mu h l}.$$

La longueur du pendule simple l, dont les oscillations ont la même durée que celles de l'aiguille, est

$$l = \frac{\Sigma mr^2}{\lambda M},$$

Σmr^2 étant le moment d'inertie de la moitié de l'aiguille OA, dont la masse est M, par rapport à l'axe de rotation O, et λ la distance du point d'application de la force, ou du pôle magnétique, au même axe.

(*) La formule du pendule simple ordinaire est $v = \sqrt{2ga}$, v étant la vitesse au point le plus bas; g l'intensité de la pesanteur et a la différenec de niveau entre le point de départ du corps oscillant et le point le plus bas. En multipliant les deux termes par la masse du pendule, M, l'équation devient $Mv = \sqrt{2gM^2a}$. Or gM est la force qui agit sur le pendule ou le poids du corps, qui correspond à μh dans le cas d'une aiguille aimantée oscillant sous l'action du magnétisme terrestre.

Mv a donc pour valeur :

$$Mv = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{\mu h \Sigma mr^2}{\lambda}},$$

et par suite

$$N\mu Q = 2 \sin \frac{1}{2} \alpha \sqrt{\frac{\mu h \Sigma mr^2}{\lambda}}.$$

On peut éliminer Σmr^2 et λ en faisant osciller l'aiguille librement, et en calculant la durée t d'une oscillation simple qu'on déduit du nombre d'oscillations décrites pendant un intervalle de temps déterminé. La théorie du pendule donne en effet :

$$t = \pi \sqrt{\frac{\Sigma mr^2}{\lambda \mu h}}, \text{ (*)}$$

et par suite l'équation ci-dessus devient

$$N\mu Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times t h \mu}{\pi},$$

d'où

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times t h}{N \pi}.$$

Si le galvanomètre est une boussole de tangentes à cadre circulaire, $N = \frac{2n\pi}{r}$ et Q devient

$$Q = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \times t r h}{n \pi^2},$$

qui donne la valeur de Q en unités électro-magnétiques absolues.

(*) Voir n° 171. La valeur de t porte au dénominateur 2λ, au n° 171, parce que, dans la formule, Σmr^2 représente le moment d'inertie de l'aiguille entière; tandis qu'ici il ne correspond qu'à la moitié de l'aiguille.

214. On peut mettre la formule sous une autre forme. Si le galvanomètre employé est une boussole de tangentes et si un courant d'intensité i donne une déviation θ, on a

$$N\mu i = h\mu \operatorname{tang} \theta$$

ou

$$N = \frac{h \operatorname{tang} \theta}{i}.$$

Si I représente le courant qui donne un angle de 45°, on aura

$$\operatorname{tang} 45^\circ = 1 \quad \text{et} \quad N = \frac{h}{I},$$

d'où

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\alpha \times It}{\pi}.$$

On aurait la même formule avec un galvanomètre de sinus, mais I serait alors l'intensité du courant qui donne une déviation égale à 90°.

215. Lorsqu'on peut reproduire continuellement dans des conditions déterminées une charge donnée, on peut mesurer la quantité d'électricité qui la constitue en faisant passer à des intervalles de temps égaux, très rapprochés, une succession de décharges à travers le fil d'un galvanomètre, de manière à obtenir une déviation permanente. On détermine la valeur du courant qui produirait cette déviation et, en divisant cette valeur par le nombre de décharges qui ont eu lieu pendant une seconde, on obtient la mesure électro-magnétique de la charge.

216. Si le courant instantané à mesurer est trop faible pour donner une déviation qu'on puisse facilement observer et si on peut le reproduire à volonté, on

lui fait traverser le galvanomètre à des intervalles tels qu'il agisse sur l'aiguille au moment où, pendant ses oscillations, elle passe par le zéro du galvanomètre, et de façon que les actions successives qu'il exerce sur l'aiguille s'ajoutent.

L'amplitude des oscillations s'accroît peu à peu. Lorsqu'elles peuvent être facilement observées et mesurées on déduit de cette amplitude, en appliquant une des formules précédentes, la quantité totale d'électricité qui a traversé le fil du galvanomètre; en divisant le nombre ainsi trouvé par celui des émissions, on a la mesure de chacune d'elles.

Lorsqu'on peut envoyer facilement dans le galvanomètre des courants instantanés égaux et de directions opposées, on abrège l'opération en faisant traverser le fil du galvanomètre, au moment où l'aiguille passe sur le zéro, par des courants de sens contraire, de façon que leur action sur l'aiguille s'ajoute.

Il peut arriver que les premières oscillations de l'aiguille soient trop faibles pour qu'on puisse les observer facilement et faire à temps les émissions de courant; on peut y remédier en imprimant d'abord à l'aiguille un léger mouvement qui lui fasse décrire un angle que l'on note, puis on envoie la charge un certain nombre de fois comme il vient d'être dit. Soit β le premier angle et γ celui que décrit l'aiguille au bout d'un certain nombre d'émissions, on a, pour la quantité totale, Q, d'électricité qui a traversé le fil, en conservant les notations précédentes :

$$Q = \frac{2th\left(\sin\frac{1}{2}\gamma - \sin\frac{1}{2}\beta\right)}{N\pi}.$$

En effet, si Mv est la quantité de mouvement commu-

niquée d'abord à l'aiguille pour lui faire décrire l'angle β,

$$Mv = \frac{2 \sin \frac{1}{2}\beta \times th\mu}{\pi};$$

la quantité d'électricité Q, en traversant le galvanomètre, produit une quantité de mouvement égale à $N\mu Q$ qui s'ajoute à la précédente, et, γ étant l'amplitude des nouvelles oscillations, on a :

$$MV + N\mu Q + \frac{2 \sin \frac{1}{2}\gamma \times th\mu}{\pi},$$

La différence entre ces deux équations donne

$$N\mu Q = \frac{2th\mu\left(\sin \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\beta\right)}{\pi}.$$

d'où on déduit la valeur de Q.

Si m est le nombre des émissions, chacune d'elles correspond à une quantité d'électricité q dont la valeur est :

$$q = \frac{Q}{m} = \frac{2th\left(\sin \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\beta\right)}{mN\pi},$$

ou

$$q = \frac{rth\left(\sin \frac{1}{2}\gamma - \sin \frac{1}{2}\beta\right)}{nm\pi^2},$$

si le galvanomètre est une boussole de tangentes de rayon r et ayant n tours de fil.

Il convient de signaler plusieurs causes d'erreur qui influent sur les indications de la boussole, telles que la torsion du fil de suspension et la résistance de l'air, la non-instantanéité des décharges ou courants à mesurer, la différence d'action des divers tours du fil conducteur sur le cadre, et enfin l'induction qui se développe dans ce

dernier sous l'influence du mouvement de l'aimant. Toutefois, les erreurs qui en résultent sont négligeables, en général, lorsque l'aimant est de petite dimension et faiblement aimanté, qu'il est soutenu par un fil de soie sans torsion, et que la durée des décharges ne dépasse pas une petite fraction de la durée d'oscillation.

CHAPITRE X.

DE L'INDUCTION.

Lois de l'induction.

217. ***Phénomènes d'induction.*** — On sait que les phénomènes d'induction, découverts par Faraday, consistent dans le développement d'une force électro-motrice qui se manifeste dans un conducteur, soit lorsqu'il se meut en présence d'un courant ou d'un aimant, soit lorsque le conducteur restant fixe, le champ magnétique dans lequel il est placé se modifie par le mouvement ou le changement d'intensité d'un courant ou d'un aimant situé dans le voisinage.

Lorsqu'il y a mouvement, la direction du courant d'induction se déduit dans chaque cas particulier de la règle suivante, connue sous le nom de loi de Lenz : Quand un déplacement relatif a lieu entre un courant ou un aimant et un conducteur, il se produit dans chaque élément de celui-ci une force électro-motrice de direction telle que le courant qu'elle tend à développer s'oppose au mouvement réel, déterminé par la loi d'Ampère.

La force électro-motrice totale, développée dans le circuit induit est la somme algébrique des forces électromotrices élémentaires, qui peuvent ne pas être toutes du même sens.

Si l'induction est due à un courant qui traverse subi-

tement un circuit voisin, sans qu'il y ait déplacement des conducteurs, chaque élément du circuit inducteur développe dans chacun des éléments du circuit induit une force électro-motrice telle que le courant qu'elle tend à développer produise l'éloignement des deux éléments.

Dans le cas où le courant inducteur change d'intensité, on n'a à considérer que la variation du courant, qu'on peut regarder comme produite par un courant additionnel qui augmente, diminue ou même annule l'intensité du courant primitif.

Enfin, lorsque l'induction est due à l'aimantation d'un corps magnétique, le courant induit a une direction telle qu'il tend à produire dans ce corps un magnétisme contraire à celui qui s'y développe.

L'induction se produit d'ailleurs non seulement sur les conducteurs voisins d'un courant, mais encore sur son propre circuit, soit lorsque les diverses parties se rapprochent ou s'éloignent, soit lorsque l'intensité se modifie. Dans ce dernier cas, chaque élément réagit sur les portions voisines, et l'effet augmente naturellement lorsque le circuit forme une bobine dont les tours sont rapprochés, et surtout lorsqu'un électro-aimant est placé à l'intérieur, auquel cas son aimantation ou sa désaimantation accroit notablement l'effet du courant et produit le phénomène connu sous le nom d'*extra-courant*.

218. En partant des lois de Lenz et de considérations hypothétiques, Neumann est arrivé à une formule élémentaire de l'induction qui, appliquée à un grand nombre de cas particuliers, a toujours conduit à des résultats que l'expérience a confirmés.

Pour établir la formule exprimant l'induction d'un élément de courant sur un élément de circuit donné,

lorsqu'un déplacement relatif se produit, Neumann admet que la force électro-motrice d'induction est proportionnelle à la force qui, d'après la loi d'Ampère, agirait entre les deux éléments s'ils étaient parcourus l'un et l'autre par un courant. Cette force est donc proportionnelle à $A ds ds'$, ds et ds' étant les deux éléments, et A l'expression qui figure dans la formule d'Ampère multipliée par 2 (nº 190) :

$$A = \frac{(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha')i'}{r^2},$$

dans laquelle ω représente l'angle que forment les deux éléments, dont la distance est r, α et α' les angles qu'ils forment l'un avec la ligne qui joint les centres, l'autre avec son prolongement, et i' l'intensité du courant qui traverse un seul des éléments, ds'.

La force électromotrice d'induction doit, en outre, varier avec la vitesse et la direction du mouvement relatif; Neumann la considère comme proportionnelle à cette vitesse et au cosinus de l'angle que forme la direction du mouvement avec la ligne des centres, de façon à avoir sa plus grande valeur lorsque les deux éléments se meuvent suivant la ligne qui joint leurs centres, et à être nulle lorsque l'un d'eux se déplace normalement à cette ligne.

On est ainsi conduit à l'expression suivante pour la force électromotrice, e, développée par le mouvement relatif de deux éléments :

$$e = KAV\cos\psi\, ds\, ds'$$

ou

$$e = \frac{K(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha')i'V\cos\psi\, ds\, ds'}{r^2},$$

V étant la vitesse relative des deux éléments, ψ l'angle que forme la ligne des centres avec cette vitesse, et K une constante dont la valeur dépend des unités adoptées.

L'intensité, i, du courant induit produit dans le circuit entier, dont R représente la résistance, par le mouvement des éléments ds et ds' est

$$i = \frac{\mathrm{KAV} \cos \psi \, ds ds'}{\mathrm{R}}.$$

Enfin, la quantité d'électricité, q, qui traverse la section de l'élément du fil induit pendant un petit intervalle de temps dt, est :

$$q = idt = \frac{\mathrm{KAV} \cos \psi \, ds ds' dt}{\mathrm{R}}$$

ou, en remplaçant la vitesse relative V par $\frac{da}{dt}$, da étant le déplacement relatif de l'un des éléments par rapport à l'autre pendant le petit intervalle de temps dt,

$$q = \frac{\mathrm{KA} \cos \psi \, ds ds' da}{\mathrm{R}}.$$

L'intégrale de ces équations, prise dans toute l'étendue des deux circuits, donne la force électro-motrice totale d'induction, l'intensité résultante du courant induit et la quantité d'électricité mise en mouvement.

219. Si l'induction est produite par le déplacement relatif d'un pôle magnétique et d'un élément de circuit, la force électromotrice d'induction est donnée par une formule semblable, mais le facteur Ads', qui correspond au courant inducteur, doit être remplacé par $\frac{\mu \sin \alpha}{r^2}$, α étant l'angle que forme l'élément du circuit, ds, avec la ligne qui joint son centre au pôle magnétique μ, situé à une distance r. L'action du pôle sur un élément de courant ids est en effet (n° 182)

$$\frac{\mu \sin \alpha}{r^2} \times ids.$$

Quant à ψ, il représente, dans ce cas, l'angle que

forme la direction de la vitesse relative avec la normale au plan qui passe par le pôle magnétique et l'élément de circuit. En le désignant par φ, on a pour l'expression de la force électromotrice d'induction, K étant encore une constante,

$$e = K \frac{\mu \sin \alpha}{r^2} V \cos \varphi ds.$$

La force électromotrice totale due au pôle μ s'obtient en intégrant cette expression pour toute l'étendue du circuit. Chacun des pôles qui se trouve dans le voisinage produit une force électromotrice dont la direction dépend des signes de μ, de $\cos \varphi$ et de $\sin \alpha$; leur somme algébrique fait connaître la force électromotrice totale.

220. Si le champ magnétique est uniforme et a pour intensité h, la force électromotrice d'induction produite par le déplacement d'un élément ds de circuit s'obtient en remplaçant dans la formule précédente $\frac{\mu}{r^2}$ par h, ce qui donne :

$$e = KhV \sin \alpha \cos \varphi ds,$$

α étant alors l'angle que forme l'élément avec les lignes de force, et φ l'angle de la vitesse avec la normale au plan mené par l'élément parallèlement aux lignes de force.

Weber est parti de cette formule pour fixer l'unité absolue de force électromotrice, sans faire intervenir le principe de la conservation de la force qui, ainsi qu'on le verra plus loin, conduit au même résultat.

En supposant $K = 1$ dans la formule précédente on a en effet pour la force électromotrice e,

$$e = hV \sin \alpha \cos \varphi ds$$

dans laquelle h, V et ds peuvent être exprimés en unités absolues.

Si un conducteur rectiligne perpendiculaire aux lignes de force se meut dans un champ magnétique d'un mouvement uniforme normalement à ces lignes et à sa propre direction, on a : $\alpha = 90$ et $\varphi = 0$, et par suite $\sin\alpha = \cos\varphi = 1$; la force électromotrice totale développée est alors, en représentant par l la longueur du conducteur rectiligne :

$$e = hVl,$$

qui donne $e = 1$ pour $h = 1$, $V = 1$ et $l = 1$.

Nous reviendrons sur ce moyen de déterminer l'unité de force électromotrice.

221. *Induction produite sans déplacement relatif.* — Neumann a ramené l'étude des phénomènes d'induction produits sur un courant fermé par l'aimantation du fer doux ou le changement de magnétisme d'un aimant, sans déplacement de l'un ou de l'autre, au cas où cette induction est due au mouvement de pôles magnétiques, en considérant d'abord deux pôles contraires et égaux placés au même point et ne produisant par conséquent aucun effet ; puis il suppose qu'on les déplace de quantités égales, de façon à avoir un aimant qui donne lieu à un courant induit dont la cause se trouve ramenée au mouvement de pôles magnétiques. En écartant plus ou moins les pôles, on simule les variations d'intensité de l'aimant inducteur.

Cette manière de faire ne convient, il est vrai, en toute rigueur, qu'à un élément magnétique, mais on peut étendre à tout le système constituant l'aimant ce que l'on fait pour un élément (*).

De l'induction produite dans un circuit par l'aimantation d'un petit élément magnétique on déduit celle d'un

(*) Voir *Œuvres de Verdet*, t. VIII.

petit courant fermé, puis enfin celle d'un courant fermé d'une étendue quelconque, dont la surface peut être décomposée, par la méthode d'Ampère, en une infinité d'aires infiniment petites enveloppées par le courant.

Neumann est ainsi arrivé à l'expression suivante pour la force électromotrice développée dans un élément ds par un autre élément ds', situé à une distance r et parcouru par un courant subissant pendant un très petit intervalle de temps dt une variation di.

$$K \frac{di}{dt} \frac{ds\,ds'}{r} \cos\omega,$$

ω étant l'angle des deux éléments, et K une constante.

D'un autre côté, Weber a été conduit par une méthode différente à la formule suivante :

$$K \frac{di}{dt} \frac{ds\,ds'}{r} \cos\alpha \cos\alpha',$$

α et α' étant les angles que les deux éléments forment, l'un avec la ligne qui joint les centres, et l'autre avec son prolongement. Cette formule, qui est différente de celle de Neumann, conduit aux mêmes résultats lorsqu'on l'applique à des courants fermés.

222. Au lieu de ces deux formules, il semble plus naturel d'adopter la suivante qui les comprend l'une et l'autre, et dans laquelle le terme qui correspond aux angles est celui qui se trouve dans la loi d'Ampère :

$$e = K(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha') \frac{ds\,ds'}{r} \frac{di}{dt},$$

qui donne pour la quantité d'électricité mise en mouvement :

$$q = \frac{e \times dt}{R} = \frac{K(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha')\,ds\,ds'\,di}{Rr}.$$

C'est en effet à cette formule qu'on est conduit si l'on

suppose que l'induction est produite par le déplacement de l'élément ds', parcouru par un courant d'intensité di, se transportant pendant un intervalle de temps très court, dt, d'une distance infinie au point où il se trouve en restant parallèle à lui-même et en suivant la ligne qui joint les deux centres.

La quantité d'électricité développée lorsque le courant passe d'une distance $r + dr$ à une distance r est en effet, d'après la formule du n° 218, en remplaçant da par dr,

$$q = \frac{\mathrm{KA} \cos \psi \, ds\, ds'\, dr}{\mathrm{R}}$$

ou

$$q = \frac{\mathrm{K}(2 \cos \omega - 3 \cos \alpha \cos \alpha')\, di \cos \psi \, ds\, ds'}{\mathrm{R}} \times \frac{dr}{r^2}.$$

Si l'on remarque que $\psi = 0$, $\cos \psi = 1$, et que l'intégrale de $\frac{dr}{r^2}$, depuis l'infini jusqu'à r, est égale à $\frac{1}{r}$, on retrouve la formule ci-dessus.

Phénomènes d'induction déduits du principe de la conservation de la force.

223. *Induction dans un champ uniforme.* — MM. Helmholtz et William Thomson, en partant des lois d'Ampère sur l'action réciproque des courants et des aimants, et du principe de la conservation de la force, sont arrivés, sans faire d'ailleurs aucune hypothèse sur l'origine première de l'induction, aux mêmes formules que Neumann, pour l'expression de la force électro-motrice d'induction qui se développe dans un circuit en mouvement dans un champ magnétique.

Considérerons le cas où le champ magnétique est uniforme; c'est celui qui se trouve réalisé lorsqu'un cir-

cuit en mouvement est soumis à la seule action du magnétisme terrestre.

Soit E la force électromotrice qui agit sur un conducteur de résistance R, et I l'intensité du courant; la force vive, ou le travail, fournie par la source électrique pendant un intervalle de temps t est EIt, si la force électromotrice ne change pas, ou si t est assez petit pour qu'on puisse considérer E comme constant pendant cet intervalle de temps.

Lorsque le circuit est au repos et que le courant ne produit pas de travail spécial, la force vive, EIt, est équivalente à la chaleur dégagée dans le conducteur, dont l'équivalent mécanique est I^2Rt, en représentant par R la résistance, ce qui conduit à l'équation (n° 126)

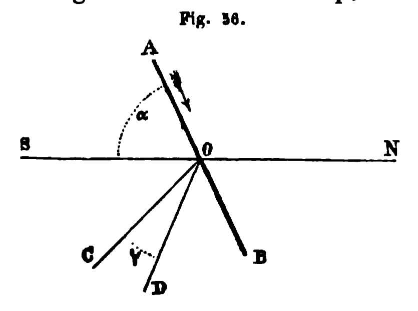
$$IEt = I^2Rt.$$

Chaque élément, ds, du conducteur est soumis à une force normale au plan mené par l'élément parallèlement aux lignes de force et qui a pour expression

$$HI \sin \alpha \, ds,$$

α étant l'angle formé par l'élément ds avec la direction des lignes de force du champ, dont l'intensité est H.

Fig. 56.



Si une portion du conducteur est rectiligne et de longueur $AB = l$ (*fig.* 56), la force résultante qui agit au centre de ce conducteur est

$$HIl \sin \alpha,$$

α étant l'angle AOS que forme l'élément avec la direction des lignes de force

NS; cette force est dirigée suivant la normale OC au plan AOSN.

224. Admettons que cette portion du courant se déplace seule sous l'action du champ, en restant parallèle à elle-même, ce qu'on peut concevoir en supposant qu'elle s'appuie sur deux barres conductrices en communication avec les pôles de la source électrique; il se produira un travail qui, en représentant par a l'espace parcouru pendant un petit intervalle de temps par un point du courant, sera

$$\mathrm{HI}la \sin \alpha,$$

si le mouvement a lieu suivant la direction OC de la force, et

$$\mathrm{HI}la \sin \alpha \cos \varphi,$$

si le mouvement a lieu suivant une ligne OD formant un angle φ avec OC.

Le travail produit pendant ce mouvement doit correspondre à une perte d'énergie ou de force vive, il faut donc que la chaleur développée dans le circuit diminue. Comme cette chaleur, si la résistance du conducteur ne varie pas, dépend uniquement de l'intensité, on doit en conclure que l'intensité décroît.

Soit i la nouvelle intensité : la force vive fournie par la source, pendant le temps t, $\mathrm{E}it$, est égale à l'équivalent, $i^2\mathrm{R}t$, de la chaleur développée dans le circuit, augmenté du travail effectué pendant le mouvement, $\mathrm{H}ila \sin \alpha \cos \varphi$. On a donc :

$$\mathrm{E}it = i^2\mathrm{R}t + \mathrm{H}ila \sin \alpha \cos \varphi,$$

d'où l'on déduit pour la nouvelle intensité du courant

$$i = \frac{\mathrm{E} - \mathrm{H}l \sin \alpha \cos \varphi \times \frac{a}{t}}{\mathrm{R}}.$$

Si le mouvement est uniforme, ou si, comme nous l'avons supposé, a représente l'espace parcouru pendant un intervalle de temps infiniment petit, $\frac{a}{t}$ est la vitesse du mouvement; en la représentant par v, la valeur de i devient :

$$i = \frac{E - Hlv \sin \alpha \cos \varphi}{R}.$$

Il se produit donc par le fait du mouvement une force électromotrice, e, de direction opposée à celle qui fait mouvoir le conducteur, proportionnelle à la vitesse et qui a pour valeur :

$$e = Hlv \sin \alpha \cos \varphi,$$

c'est la force électromotrice d'induction.

Remarquons que $H \sin \alpha$ est la composante de l'intensité du champ magnétique suivant une normale à l'élément AB (*fig.* 56); si on la représente par h, la valeur de e devient :

$$e = hlv \cos \varphi.$$

Si, par exemple, un courant vertical est mis en mouvement sous l'influence du magnétisme terrestre, la force électromotrice d'induction est représentée par la formule précédente, dans laquelle h est la composante horizontale du magnétisme terrestre.

Lorsque le conducteur rectiligne AB (*fig.* 56) se meut suivant la direction OC de la force, $\cos \varphi = 1$, et e devient :

$$e = hlv.$$

L'intensité du courant i est alors :

$$i = \frac{E - hlv}{R}.$$

La force électromotrice d'induction hlv augmente à

mesure que la vitesse v s'accroît, et le circuit n'est parcouru par aucun courant lorsque

$$E = hlv \quad \text{ou} \quad v = \frac{E}{hl}.$$

Lorsque cette vitesse est atteinte, le conducteur qui repose, ainsi que nous l'avons supposé, sur deux barres parallèles, continue à se mouvoir d'un mouvement uniforme (*).

Supposons, par exemple, que la force électromotrice E soit celle d'un élément Daniell, dont la valeur absolue est environ 10.700 (mètre, seconde et masse du gramme), et que le conducteur vertical mobile se meuve horizontalement; normalement au plan du méridien magnétique, on aura, pour la vitesse théorique qu'atteindrait la barre mobile $\frac{10.700}{l \times 1,92}$ mètres par seconde, (la composante horizontale du magnétisme terrestre étant 1,92) ou 55.700 mètres par seconde si la longueur l est égale à un mètre.

225. La force électromotrice d'induction :

$$e = Hlv \sin \alpha \cos \varphi$$

varie avec l'intensité H du champ magnétique avec la vitesse v du mouvement, et est indépendante de la force électromotrice E qui agit sur le circuit; c'est donc une force spéciale uniquement due au mouvement du conducteur dans le champ et qui doit subsister alors même que la force électromotrice est nulle et que l'on fait mouvoir le conducteur en faisant intervenir une force étrangère. Le travail qu'il faut dépenser pour produire le mouvement est alors, si le courant ne produit aucun tra-

(*) En ne tenant pas compte des frottements, bien entendu.

vail particulier, équivalent à la chaleur développée dans le circuit. Ce travail, pendant un intervalle de temps t, est, lorsque le mouvement est uniforme, i^2Rt ou $\frac{e^2t}{R}$, ou enfin $\frac{H^2l^2v^2t \sin^2\alpha \cos^2\varphi}{R}$.

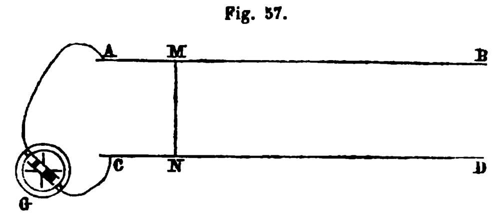
Quant à la direction du courant, elle est de sens contraire à celle qu'aurait le courant qui produirait spontanément le mouvement réel du conducteur. Il ira de B en A, dans la *fig.* 56, si le conducteur AB se déplace en avant du plan ABSN, et de A en B si le sens du mouvement est inverse.

On retrouve ainsi les lois de Lenz et de Neumann.

Unités électro-magnétiques de force électromotrice et de résistance.

226. *Définition des unités de force électromotrice et de résistance.* — Si un conducteur rectiligne MN (*fig.* 57), de

Fig. 57.



longueur l, se meut uniformément avec une vitesse v sous l'action d'une force étrangère, normalement aux lignes de force d'un champ magnétique et à sa propre direction, en s'appuyant sur deux barres conductrices parallèles AB et CD, la force électromotrice d'induction que produit ce mouvement, et dont le courant peut être observé à l'aide d'un galvanomètre G, est, en ne tenant pas compte du signe :

$$e = Hlv.$$

Si l'on suppose $H = 1$, $l = 1$ et $v = 1$, on a $e = 1$, ce qui conduit à la définition suivante de la force électromotrice :

« C'est celle qui se développe dans une barre métallique de longueur égale à l'unité, se mouvant dans un champ magnétique ayant l'unité d'intensité normalement aux lignes de force et à sa propre direction. »

On peut en déduire aussi la définition de l'unité de résistance, qu'on peut donner sous diverses formes. Représentons par W l'équivalent mécanique de la chaleur dégagée par un courant i, dans un circuit de résistance R, pendant un intervalle de temps t. On a, s'il ne se produit aucun travail particulier,

$$W = iet \quad \text{ou} \quad W = \frac{e^2 t}{R},$$

et par suite,

$$R = \frac{e^2 t}{W},$$

qui donne

$$R = 1, \quad \text{si} \quad e = 1, \quad t = 1 \quad \text{et} \quad W = 1.$$

On est ainsi conduit à la définition de l'unité de résistance donnée par M. Jenkin, et qui a été reproduite dans notre introduction :

« L'unité de résistance est telle que le courant produit dans un circuit de cette résistance par la force électro-motrice d'une barre de l'unité de longueur (un mètre), qui se déplace à travers un champ magnétique ayant l'unité d'intensité, perpendiculairement aux lignes de force et à sa propre direction, développerait dans ce circuit pendant l'unité de temps (une seconde) une chaleur équivalente à l'unité absolue de travail. »

227. *Dimensions des unités électro-magnétiques de force électromotrice, de résistance et de quantité.* Les di-

mensions de l'unité de force électromotrice peuvent se déduire des équations précédentes, $e = hlv$ ou $W = iet$, en remplaçant h, l, v, W, t et i par les unités absolues H, L, V, W, T et I_m, et en substituant à la place des unités dérivées H, V, W et I_m leurs valeurs en fonction des trois unités fondamentales, $V = \frac{L}{T}$, $W = \frac{ML^2}{T^2}$, $H = \frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}T}$ (n° 165), et $I_m = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$ (n° 189).

On est ainsi conduit aux dimensions suivantes de l'unité électro-magnétique de force électromotrice, que nous représenterons par E_m :

$$E_m = \frac{M^{\frac{1}{2}}L^{\frac{3}{2}}}{T^2}.$$

Pour l'unité de résistance on a $R = \frac{E}{I}$, et par suite $R_m = \frac{E_m}{I_m}$, d'où l'on déduit les dimensions :

$$R_m = \frac{L}{T}.$$

Quant à l'unité de quantité Q_m, elle est donnée par l'équation $Q = It$, d'où

$$Q_m = I_m T.$$

et

$$Q_m = L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}.$$

Ces dimensions sont les mêmes que celles des unités électro-dynamiques (n° 159), qui ne diffèrent des unités électro-magnétiques que par un simple coefficient numérique, et encore peut-on considérer les deux systèmes d'unités comme identiques, ainsi que nous l'avons indiqué au n° 190, si l'on admet pour l'action élémentaire de

deux éléments de courant l'un sur l'autre la formule ordinaire d'Ampère multipliée par le nombre 2, ou :

$$f = \frac{i'i'dsds'}{r^2}(2\cos\omega - 3\cos\alpha\cos\alpha').$$

228. L'unité de résistance a pour dimension $\frac{L}{T}$, qui représente une vitesse; on peut démontrer qu'en effet la résistance d'un conducteur est une vitesse en mesure absolue (*).

Supposons que dans la figure 57 les deux barres fixes AB et CD en communication avec un galvanomètre absolu, G, soient horizontales, que le plan qui passe par ABCD soit vertical et normal à la direction du méridien magnétique de la terre, enfin que le conducteur mobile MN soit également vertical. Si h représente la composante horizontale du magnétisme terrestre, l l'écartement des deux barres AB et CD, et v la vitesse du conducteur mobile MN, la force électromotrice d'induction e aura pour valeur hvl, et l'intensité du courant induit i sera :

$$i = \frac{e}{R} = \frac{hvl}{R},$$

R étant la résistance totale du circuit.

L'intensité du courant, donnée par le galvanomètre, a pour valeur (n° 191)

$$\frac{hr^2}{l_1}\operatorname{tang}\theta,$$

θ étant la déviation, r le rayon du galvanomètre et l_1 la longueur du fil enroulé sur le cadre circulaire qui entoure l'aiguille; on a donc

$$\frac{hr^2}{l_1}\operatorname{tang}\theta = \frac{hvl}{R};$$

d'où

$$R = \frac{vll_1}{r^2\operatorname{tang}\theta}.$$

(*) Cette démonstration est due à sir William Thomson.

Si la distance l des deux barres est égale à r, et si le fil enroulé sur le cadre n'entoure qu'une portion de tour corespondant à 57° 1/4, auquel cas on a aussi $l_1 = r$, l'équation devient

$$R = \frac{v}{\operatorname{tang} \theta},$$

et donne $R = v$ si $\operatorname{tang} \theta = 1$, c'est-à-dire si $\theta = 45°$.

Ainsi, lorsque la condition $l = l_1 = r$ est remplie, la résistance du circuit est précisément, en unités absolues, la vitesse qu'il faudrait imprimer à la barre mobile pour obtenir, au galvanomètre, une déviation de 45°.

On a encore $R = v$ si le fil du galvanomètre a une longueur l_1 et si la distance l des barres contre lesquelles est appuyé le conducteur est telle que $l_1 = \frac{r^2}{l}$. On a en effet $R = \frac{v}{\operatorname{tang} \theta}$, ou $R = v$ si $\theta = 45°$.

Induction dans un circuit de forme quelconque en mouvement.

229. *Transformation de la formule d'induction.* — Il ne serait pas pratiquement possible de déterminer la résistance absolue d'un conducteur rectiligne en le faisant mouvoir contre deux barres métalliques parallèles; mais on peut transformer la formule de l'induction de façon à pouvoir l'appliquer au cas d'un conducteur mobile tournant autour d'un axe fixe.

On a, ainsi qu'on l'a vu (n° 225), pour la force électromotrice d'induction e, développée dans un conducteur rectiligne de longueur l, qui se meut parallèlement à lui-même avec une vitesse v dans un champ magnétique H,

$$e = Hlv \sin \alpha \cos \varphi.$$

En remplaçant la vitesse v par le rapport $\frac{da}{dt}$ (*) de l'espace da parcouru par un point quelconque du conducteur mobile à l'intervalle de temps infiniment petit dt pendant lequel a lieu le mouvement, la formule devient :

$$e = \mathrm{H}l \sin\alpha \cos\varphi \frac{da}{dt}.$$

Si la vitesse $v = \frac{da}{dt}$ est uniforme, et si le circuit est complété par un conducteur fixe ayant une capacité électrostatique négligeable, l'intensité i du courant produit par cette force électromotrice à un instant quelconque est, en désignant par R la résistance totale du circuit,

$$i = \frac{e}{\mathrm{R}} = \frac{\mathrm{H}l \sin\alpha \cos\varphi}{\mathrm{R}} \frac{da}{dt}.$$

Enfin, la quantité d'électricité dq qui traverse une section du conducteur pendant l'espace de temps dt, est : $dq = idt$, ou

$$dq = \frac{\mathrm{H}l \sin\alpha \cos\varphi da}{\mathrm{R}}.$$

Cette dernière équation est indépendante de l'intervalle de temps dt; la quantité d'électricité mise en mouvement pendant une série de déplacements successifs, dont le total constitue une longueur a, est donc :

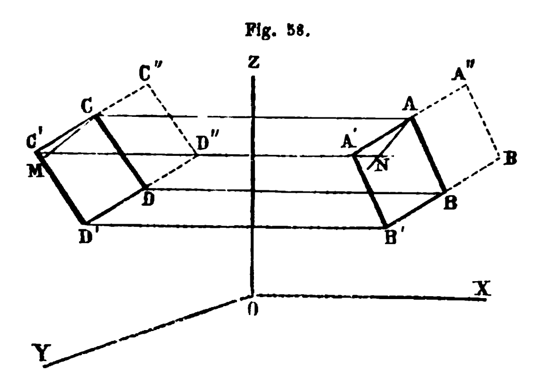
$$q = \frac{\mathrm{H}la \sin\alpha \cos\varphi}{\mathrm{R}},$$

quelle que soit la grandeur de a, que le mouvement du conducteur soit uniforme ou qu'il soit varié.

(*) Rapport que nous avons représenté plus haut par $\frac{a}{t}$, en supposant a et t très petits (n° 274).

230. Supposons que OX (*fig.* 58) représente la direction

Fig. 58.



des lignes de force, et concevons un plan ZOY normal à OX. Soit AB le conducteur rectiligne de longueur l, qu'on déplace en le maintenant parallèle à lui-même en lui faisant suivre un trajet rectiligne $AA' = BB' = a$ de AB en A′B′; soient CD et C′D′ les projections de AB et de A′B′ sur le plan ZOY, et par suite CDD′C′ celle de la surface ABB′A′ parcourue par le conducteur AB. La quantité d'électricité développée par l'induction qui, pendant ce mouvement, traverse le conducteur est, ainsi qu'on l'a vu plus haut :

$$q = \frac{Hla \sin \alpha \cos \varphi}{R}.$$

α représente l'angle ABD, et $l \sin \alpha$ est égal à la projection CD de AB sur le plan ZOY; φ est l'angle NAA′ que forme la direction du mouvement AA′ avec la normale AN au plan CABD, mené par l'élément parallèlement aux lignes de force, et la longueur de cette normale, AN, comprise entre les plans parallèles ABDC et A′B′D′C′, égale à la perpendiculaire CM abaissée du point C sur la ligne C′D′, est $AA' \cos A'AN$ ou $a \cos \varphi$.

La quantité d'électricité qui traverse le conducteur AB,

par le fait de son déplacement à travers le champ magnétique de AB en A'B', est donc :

$$q = \frac{H \times CD \times CM}{R};$$

or, CD × CM est la surface de la projection CDD'C', sur le plan ZOY normal aux lignes de force, du parallélogramme ABB'A' parcouru par le courant.

En représentant par S cette surface, on a pour la quantité d'électricité mise en mouvement dans le conducteur pendant sa translation :

$$q = \frac{HS}{R}.$$

L'intensité du courant induit à un instant donné est, en représentant par dS la projection de la surface parcourue par le conducteur mobile pendant un très petit espace de temps dt :

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{HdS}{Rdt},$$

ou, si le mouvement est uniforme,

$$i = \frac{HS}{Rt}.$$

Quant à la force électromotrice, elle a pour valeur

$$e = Ri = \frac{HdS}{dt}$$

dans le cas d'un mouvement varié, et

$$e = \frac{HS}{t}.$$

si le mouvement est uniforme.

Le courant ne peut d'ailleurs se manifester que si les extrémités du conducteur mobile s'appuient sur deux

barres conductrices reliées entre elles par un fil métallique, et R représente la résistance du circuit entier.

Il ne se produit pas de courant quand la projection sur le plan ZOY de la surface parcourue est nulle, ce qui a lieu lorsque le conducteur se meut dans un plan parallèle à la direction des lignes de force OX. La projection de l'espace parcouru par le conducteur se réduit en effet, dans ce cas, à une simple ligne.

Enfin, si le mouvement avait lieu dans la direction opposée, de AB en A″B″, dont la projection est C″D″, le courant induit serait de sens contraire; cos φ change en effet de signe.

231. Quand le conducteur rectiligne mobile parcourt un trajet courbe en restant parallèle à lui-même, auquel cas la surface qu'il décrit est une surface cylindrique, la quantité d'électricité mise en mouvement est encore égale à la projection de l'espace parcouru, et la direction du courant varie suivant le sens du mouvement de la projection sur le plan normal aux lignes de force. Lorsque le conducteur mobile revient à sa position première, il s'est produit deux courants de directions contraires, et les quantités d'électricité mises en mouvement successivement dans les deux sens sont égales.

232. Les mêmes principes s'appliquent à tous les éléments d'un circuit curviligne qu'on déplace en le maintenant parallèle à lui-même, et par conséquent au circuit entier; mais il faut tenir compte de la direction des forces électromotrices dans les diverses parties du circuit.

Si, par exemple, ACDEFB (*fig.* 59) est la projection d'un circuit sur un plan normal aux lignes de force, et si le déplacement de cette projection a lieu en ligne droite suivant la direction des lignes AA′, BB′, etc., il se déve-

loppera pendant le mouvement des forces électromotrices égales et contraires dans les portions projetées en AC et en CD, ainsi que dans celles dont les projections sont BF et FE. La quantité d'électricité mise en mouvement sera, en réalité, uniquement due au déplacement de la partie du circuit projetée en DE, et sera égale au produit de la surface DEE'D' par l'intensité du champ, divisé par la résistance du circuit.

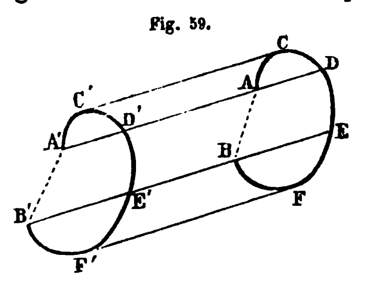


Fig. 59.

On peut remarquer que la surface DEE'D' est égale à la surface ABB'A' qui est la projection de l'espace parcouru par la ligne droite AB menée par les extrémités A et B du circuit.

La force électromotrice développée dans une portion quelconque de circuit qui se meut en restant parallèle à elle-même dans un champ magnétique est donc égale et de signe contraire à celle qui se développerait dans le conducteur rectiligne qui joindrait ses deux extrémités, et, si le circuit est fermé (c'est-à-dire si les deux points A et B coïncident), il ne se produit aucun courant induit.

233. — Considérons maintenant un conducteur rectiligne mobile qui se meut sans rester parallèle à lui-même, ses deux extrémités reposant, comme nous l'avons supposé plus haut, sur deux pièces métalliques, qu'on met en communication par l'intermédiaire d'un fil conducteur. Le mouvement de ce conducteur dans un champ magnétique produit un courant d'induction et la quantité d'électricité en mouvement, si la capacité électro-statique du fil qui complète le circuit est négligeable, est encore

égale au produit de la projection de l'espace parcouru par le conducteur sur un plan normal aux lignes de force par le rapport $\frac{H}{R}$ de l'intensité magnétique du champ à la résistance du circuit.

On démontre aisément l'exactitude de cette proposition pour un conducteur rectiligne qui tourne autour de l'une de ses extrémités dans un plan normal aux lignes de force, en appliquant la même méthode que dans le cas où le conducteur se meut en restant parallèle à lui-même, c'est-à-dire en le considérant d'abord comme traversé par un courant dû à une force électromotrice, qu'on suppose ensuite égale à zéro.

Soit, en effet, i l'intensité du courant qui traverse le conducteur, qu'on peut considérer comme constante pendant un espace de temps infiniment court dt; l'énergie fournie par la force électromotrice E est $\mathrm{E}i\,dt$; elle est égale à l'équivalent mécanique $i^2\mathrm{R}\,dt$ de la chaleur développée dans le conducteur augmenté du travail effectué par le courant.

Si l est la longueur du conducteur, il est soumis à une force normale à sa direction, située dans le plan de son mouvement et égal à $\mathrm{H}il$, H étant l'intensité du champ magnétique. Lorsqu'il tourne d'un petit angle, $d\omega$ l'espace parcouru par son point milieu, auquel on peut considérer la force comme appliquée, est $\frac{1}{2}\,l\,d\omega$ et le travail effectué est

$$\mathrm{H}il \times \frac{1}{2}\,l\,d\omega = \frac{1}{2}\,\mathrm{H}il^2\,d\omega.$$

On a donc la relation :

$$\mathrm{E}i\,dt = i^2\mathrm{R}\,dt + \frac{1}{2}\,\mathrm{H}il^2\,d\omega,$$

ou

$$i = \frac{E - \frac{1}{2} H l^2 \frac{d\omega}{dt}}{R}$$

Cette équation subsiste quelle que soit la valeur de E; en faisant E = 0, elle devient :

$$i = -\frac{1}{2} \frac{H l^2 \frac{d\omega}{dt}}{R}$$

ou

$$idt = -\frac{1}{2} \frac{H l^2 d\omega}{R}$$

idt est la quantité d'électricité, dQ, qui traverse la section du conducteur mobile pendant l'intervalle de temps dt; $\frac{1}{2} l^2 d\omega$ est la surface décrite par le conducteur mobile pendant le même temps, ou sa projection sur le plan normal aux lignes de force, en la représentant par dS, on a donc, en ne tenant pas compte du signe,

$$dQ = \frac{H dS}{R},$$

ou

$$Q = \frac{HS}{R},$$

Si l'on compte la quantité d'électricité développée, Q. et la surface, S, à partir du même moment.

La même formule s'applique aussi au cas où le conducteur rectiligne n'est pas prolongé jusqu'au point autour duquel il tourne, et décrit seulement une portion de surface annulaire comprise entre deux arcs concentriques et dont S est la surface.

234. Si le mouvement du conducteur a lieu dans un plan parallèle aux lignes de force, auquel cas sa projection sur un plan normal à ces lignes est nulle, il ne

se produit pas d'induction, car la force que développerait le champ sur ce conducteur, supposé traversé par un courant, serait normale au plan du mouvement, et ne donnerait lieu à aucun travail.

Supposons enfin que le mouvement de rotation ait lieu dans un plan oblique par rapport aux lignes de force. L'action du champ magnétique sur le conducteur est la même que si elle était due à deux champs dont les lignes de force seraient parallèles au plan du mouvement pour l'un d'eux, tandis que celles de l'autre seraient normales au même plan ; quant aux intensités de ces champs, elles seraient $H \sin \alpha$ pour le premier, et $H \cos \alpha$ pour le second, en représentant par α l'angle des lignes de force du champ primitif avec la normale au plan dans lequel se meut le conducteur. Le champ magnétique parallèle à ce plan n'exerce aucune action sur le conducteur mobile, tandis que l'autre produit un courant d'induction et la quantité d'électricité qui traverse la section de ce conducteur pendant qu'il parcourt une surface S, est $H \cos \alpha \times \frac{S}{R}$ ou $\frac{H}{R} \times S \cos \alpha$.

Or, $S \cos \alpha$ est la projection sur le plan normal aux lignes de force de la surface S parcourue par le conducteur en mouvement ; si on la représente par S_1, on a donc pour la quantité d'électricité qui traverse la section de ce conducteur.

$$\frac{HS_1}{R}.$$

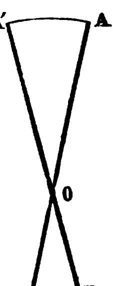
Tout mouvement d'un conducteur rectiligne peut se décomposer en une série de mouvements élémentaires de translation et de rotation, dont la projection sur un plan est égale à celle de la surface décrite par ce conducteur

la loi énoncée plus haut est donc exacte, quel que soit le mouvement du conducteur rectiligne.

235. Remarquons toutefois qu'il y a lieu de tenir compte du sens du mouvement de la projection du conducteur sur le plan normal aux lignes de force.

Ainsi, si AOB (*fig.* 60) est cette projection à un moment donné, et si le conducteur en se déplaçant vient occuper la position projetée en A'OB', la force électromotrice d'induction qui développe un courant allant de O en A dans la branche OA, en développera un de O en B dans la branche OB.

Fig. 60.



La différence entre ces deux forces électromotrices constitue la force électro-motrice résultante due au mouvement du conducteur AB et la quantité d'électricité mise en mouvement par le fait de ce déplacement, est :

$$\frac{H(\text{surf. AOA'} - \text{surf. BOB'})}{R}.$$

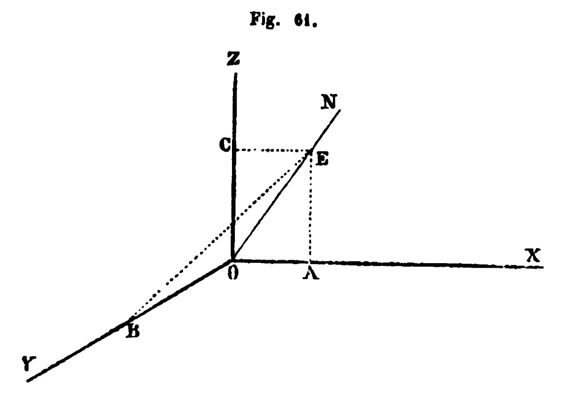
Si le conducteur rectiligne mobile tournait autour de son centre, il ne se développerait aucun courant induit pendant son mouvement.

236. La loi précédente établie dans le cas d'un conducteur rectiligne, s'applique à tous les éléments d'un conducteur mobile et par conséquent au conducteur entier lui-même. On peut donc représenter d'une façon générale la quantité totale d'électricité mises en mouvement lorsque le conducteur se déplace par l'expression $\frac{HS}{R}$, S étant l'espace parcouru par la projection du conducteur sur un plan normal aux lignes de force, lorsque cette projection se déplace dans le même sens, ou la

différence des espaces parcourus par les parties de la projection qui se déplacent en sens contraire.

237. Supposons enfin qu'on ait trois plans de projection perpendiculaires les uns aux autres ZOX, YOZ et YOX (*fig.* 61), et que la direction des lignes de force,

Fig. 61.



ON, du champ magnétique ne soit parallèle à aucune des intersections; on pourra considérer l'action magnétique comme due aux trois composantes OA, OB et OC de l'intensité magnétique ON suivant les trois axes OX, OY et OZ, qui ont pour valeur $H\cos\alpha$, $H\cos\beta$ et $H\cos\gamma$, α, β et γ étant les angles que forme la direction des lignes de force, ON, avec ces trois axes. Si un circuit est mobile dans l'espace, chacune des composantes produit une force électromotrice égale à $\frac{hds}{dt}$, ds étant la projection de l'espace parcouru par le circuit sur le plan normal à cette composante et dt la durée du mouvement.

La somme algébrique des forces électromotrices dues à ces trois composantes donne la force électromotrice totale.

238. On peut établir les lois de l'induction par la con-

sidération des lignes de force, dont Faraday a introduit l'usage en Angleterre dans l'étude de l'électricité.

Ces lignes de force, qui représentent en chaque point la direction de la force magnétique, sont les lignes normales aux surfaces équipotentielles dont il a été question au n° 167, mais Faraday s'en est servi pour la représentation des phénomènes électro-magnétiques avant les travaux de Green sur la théorie du potentiel. Cette méthode n'est pas usitée en France; nous nous bornerons à en dire quelques mots.

Pour explorer un champ magnétique, on conçoit à travers ce champ un certain nombre de lignes de force, et l'on démontre aisément que l'écartement de deux quelconques de ces lignes est en chaque point de leur parcours en raison inverse de l'intensité magnétique.

Si donc on conçoit un grand nombre de ces lignes, l'intensité magnétique aux divers points de l'une quelconque d'entre elles sera représentée par le nombre de celles qui traversent l'unité de surface, située normalement à leur direction.

On peut, par conséquent, représenter un champ magnétique par un certain nombre de lignes de force, dont l'écartement en chaque point est en raison inverse de l'inntensité magnétique. Pour un champ uniforme, toutes ces lignes sont également espacées les unes des autres.

Si un conducteur est en mouvement dans un champ magnétique, la quantité d'électricité qui le traverse est proportionnelle au nombre des lignes de force qu'il coupe, et par conséquent, si le champ est uniforme, à la projection de la surface qu'il décrit sur un plan normal à ces lignes, ce qui conduit aux résultats énoncés précédemment.

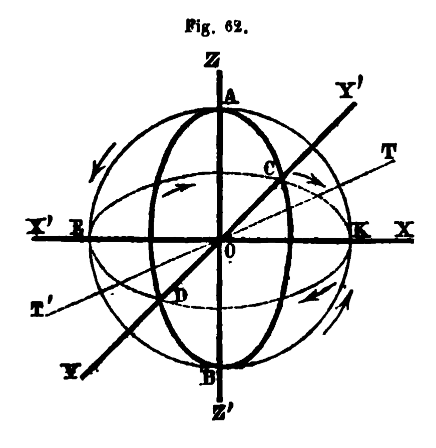
Application des lois de l'induction à la détermination de l'unité absolue de résistance.

239. Pour déterminer l'unité absolue de résistance, il suffit de chercher la résistance absolue d'un fil conducteur formé d'un métal quelconque de section et de longueur connues; en divisant la longueur de ce fil, l, par le nombre trouvé pour sa résistance absolue, a, on a l'unité absolue de résistance, $\frac{l}{a}$, exprimée par une longueur connue du fil qui a servi aux expériences.

On peut effectuer cette mesure par plusieurs méthodes fondées sur les lois de l'induction; nous indiquerons les principales.

240. *Courant induit produit par la rotation d'un circuit.* — Considérons un conducteur ACBD (*fig.* 62), de

Fig. 62.



orme quelconque d'ailleurs, situé dans un plan normal à la direction XX' des lignes de force d'un champ magnétique uniforme, et supposons qu'on fasse tourner ce cir-

cuit d'un angle de 180° autour d'un axe ZZ' normal à XX' dans la direction de la flèche, c'est-à-dire de façon que le point C de l'arc ACB passe par K, et que le point D de l'arc ADB passe par E.

Pendant ce mouvement il se développe un courant d'induction allant, si le pôle nord est situé du côté X, de B en A dans l'arc ACB et de A en B dans l'arc BDA. Ces deux courants circulent dans le même sens et s'ajoutent.

Si le mouvement de rotation est uniforme, le courant induit n'a pas une intensité constante; sa plus grande valeur correspond au moment où le circuit passe par le plan ZOX parallèle aux lignes de force du champ.

Désignons par H l'intensité du champ magnétique, par S et S' les deux surfaces comprises entre l'axe AB et les arcs ACB et ADB, surfaces qui peuvent être différentes, et enfin par R la résistance totale du circuit. On a, en vertu des principes exposés plus haut, pour la quantité d'électricité qui est mise en mouvement pendant que le conducteur tourne de 180°, $\frac{2HS}{R}$ pour l'arc ACB et $\frac{2HS'}{R}$ pour l'arc ADB, ce qui donne pour la quantité totale d'électricité qui traverse le conducteur, dans la direction de la flèche, $\frac{2H(S+S')}{R}$, ou plus simplement $\frac{2HS}{R}$, si S représente la surface totale ACBD.

Si les lignes de force du champ étaient parallèles à l'axe de rotation ZOZ', il n'y aurait aucun courant produit dans le circuit, puisque les courants développés dans les deux branches DAC et CBD, égaux et de sens contraire, s'annuleraient.

Enfin, si les lignes du champ ont une direction oblique TT', et si θ représente l'angle TOX, l'effet produit par le

champ magnétique H sur le conducteur en mouvement peut être considéré comme dû aux deux composantes H cos θ, suivant OX, et H sin θ, suivant OZ. L'action de la seconde composante est nulle; quant à la première, elle donne lieu, lorsque le cadre tourne de 180°, à un courant électrique produit par le mouvement de la quantité d'électricité $\frac{2HS\cos\theta}{R}$.

C'est ce qui a lieu lorsqu'un conducteur fermé est mis en mouvement autour d'un axe vertical; le courant est produit uniquement par la composante horizontale du magnétisme terrestre, H cos θ, ou h, et la quantité d'électricité qui circule, quand ce conducteur tourne de 180°, est $\frac{2hS}{R}$.

Si le fil enroulé sur le cadre forme p tours, la quantité d'électricité développée est

$$\frac{2phS}{R}.$$

Lorsque le cadre continue à tourner de façon que le point C, arrivé en D, revienne à sa première position en passant par E, il se développe encore un courant induit, mais qui a une direction contraire à celle qu'il avait pendant la première moitié du mouvement. Le sens du courant dans l'anneau mobile varie donc à chaque demi-révolution.

241. On peut faire passer l'électricité développée par l'induction dans un circuit extérieur en faisant aboutir les extrémités du fil enroulé sur le cadre à deux anneaux métalliques sur lesquels appuient des frotteurs reliés à ce circuit, et disposer ces anneaux de façon qu'ils forment un commutateur et que le sens du courant dans le conducteur extérieur soit constant.

Si m est le nombre de demi-révolutions effectuées par le cadre mobile pendant une seconde, la quantité d'électricité qui traversera le conducteur extérieur pendant ce temps sera

$$\frac{2pmhS}{R}.$$

Le mouvement de rotation peut d'ailleurs être assez rapide pour produire l'effet d'un courant continu, dont l'intensité est exprimée en unités absolues par cette formule.

On peut mesurer l'intensité de ce courant en lui faisant traverser le fil d'un galvanomètre absolu; si i représente cette intensité, on en déduit la valeur de la résistance R :

$$R = \frac{2pmhS}{i}.$$

Supposons par exemple que le galvanomètre soit une boussole de tangentes de rayon r et dont le fil ait une longueur l, on aura (n° 191) :

$$i = \frac{hr^2}{l} \operatorname{tang} \theta,$$

ce qui conduit à l'expression :

$$R = \frac{2pmlS}{r^2 \operatorname{tang} \theta}.$$

Cette expression est indépendante de la valeur h du magnétisme terrestre.

R représente la résistance totale du circuit, comprenant celle de l'inducteur, du galvanomètre et des fils de jonction. On peut, par les procédés galvanométriques ordinaires, comparer ces diverses résistances et les exprimer en longueur d'un même fil de conductibilité et de section déterminées; on en déduit la longueur de ce fil qui correspond à l'unité absolue de résistance.

Cette méthode ne donnerait pas des résultats suffisamment exacts, à cause de la résistance qui est introduite par les frotteurs destinés à changer le sens du courant dans le circuit extérieur à chaque demi-révolution.

242. *Première méthode de Weber.* — Weber a déterminé en 1851 l'unité absolue de résistance par deux méthodes différentes dont nous nous bornerons à indiquer le principe (*).

La première consiste à mesurer la quantité d'électricité mise en mouvement par l'action du magnétisme terrestre dans un conducteur fermé, lorsqu'on le fait tourner brusquement autour d'un axe vertical d'un angle de 90 ou de 180°.

Le fil, enroulé autour d'un cadre de bois, était mis en communication avec un galvanomètre éloigné par des fils conducteurs assez flexibles pour permettre de faire osciller le cadre de 180° sans rompre la communication.

Si l'on suppose le cadre mobile placé d'abord dans un plan normal au méridien magnétique, et si on le fait tourner d'un angle de 180°, il se développe un courant induit, et la quantité d'électricité mise en mouvement, q, est, ainsi qu'on l'a vu plus haut,

$$q = \frac{2hpS}{R},$$

p étant le nombre de tours du fil sur le cadre, S la surface enveloppée par chacun d'eux, et R la résistance totale de circuit.

En traversant le galvanomètre, cette quantité d'élec-

(*) La première mesure de la résistance d'un conducteur en unités électromagnétiques absolues a été effectuée en 1849 par M. Kirchhoff. Sa méthode, qui reposait également sur l'induction, consistait à écarter brusquement l'une de l'autre deux parties d'un même circuit traversé par un courant et à mesurer la variation d'intensité qui en résulte.

tricité produit un écart subit de l'aiguille et, si α est l'angle qu'elle décrit, la quantité q est donnée par la formule

$$q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times th}{N\pi},$$

N étant la constante du galvanomètre et t la durée d'une oscillation simple de l'aiguille sous l'influence du magnétisme terrestre (n° 213).

On a donc

$$\frac{2hpS}{R} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times th}{N\pi};$$

d'où :

$$R = \frac{N\pi pS}{t \sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

On remarquera que la valeur de t dépend de l'intensité du magnétisme terrestre, et doit être déterminée au moment de l'expérience.

Si le galvanomètre est à cadre circulaire de rayon r, et si n est le nombre de tours de fil, on a :

$$N = \frac{2n\pi}{r}$$

et

$$R = \frac{2\pi^2 npS}{rt \sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

On peut accroître la déviation α en faisant tourner plusieurs fois l'inducteur d'un angle de 180° au moment où l'aiguille passe par le zéro, de façon que les actions sur l'aiguille s'ajoutent. Si α_1 est l'angle d'oscillation de l'aiguille au bout d'un nombre m de mouvements du cadre, on a :

$$R = \frac{2\pi^2 npmS}{rt \sin \frac{1}{2} \alpha}.$$

Cette formule est établie en supposant que le courant induit ne circule que pendant un instant infiniment court, au moment où l'aiguille du galvanomètre passe par le zéro, et que tous les tours de fil ont une même action; mais en réalité il n'en est pas ainsi, et Weber a dû modifier un peu la marche des expériences et introduire diverses corrections.

Le cadre mobile de l'instrument dont il s'est servi avait environ 1 mètre de diamètre; le fil enroulé autour du cadre était un fil de cuivre recouvert de coton pesant 16 kilogrammes, et décrivant 145 tours. Quant au galvanomètre, il était formé d'un cadre circulaire de plus de $0^m,60$ de diamètre, au centre duquel était suspendu un petit barreau aimanté de $0^m,06$ seulement de longueur; le fil enroulé autour de cet aimant était un fil de cuivre recouvert de coton faisant 1.854 révolutions.

243. *Méthode dite d'amortissement.* — La seconde méthode employée par Weber, dite méthode d'*amortissement*, consiste à faire osciller sous l'influence du magnétisme terrestre un barreau fortement aimanté au centre d'un cadre sur lequel est enroulé un fil conducteur, et à comparer la durée des oscillations suivant que le circuit est ouvert ou fermé.

Dans le premier cas, les oscillations ne diminuent que très lentement d'amplitude sous l'influence de la torsion du fil et de la résistance de l'air; mais, lorsque le circuit est fermé, il se développe, sous l'influence du mouvement de l'aimant, des courants induits qui réagissent sur lui et amortissent le mouvement: l'amortissement dépend de l'intensité du courant induit, et par conséquent de la résistance du circuit.

De l'amplitude des oscillations on déduit la force électromotrice d'induction, et de leur décroissance l'intensité du courant induit. Le rapport de la force électro-

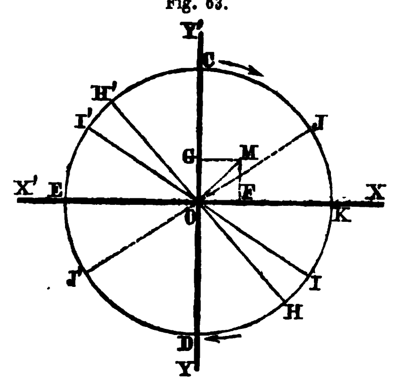
motrice à l'intensité donne la valeur de la résistance absolue du conducteur enroulé sur le cadre.

244. ***Méthode employée par la commission de l'Association britannique.*** — La méthode employée par la commission de l'Association britannique pour l'avancement des sciences, sur l'indication de sir William Thomson, consiste à faire tourner d'un mouvement rapide autour d'un axe vertical un anneau sur lequel est enroulé un fil conducteur, et à observer la déviation d'un petit aimant mobile au centre de cet anneau. La direction du courant change à chaque demi-révolution dans le fil conducteur, mais, par suite des positions différentes qu'il occupe, il agit toujours dans le même sens sur l'aimant placé au centre.

L'intensité du courant induit dans le conducteur pendant la rotation autour de l'axe est variable, et il est nécessaire de calculer la quantité d'électricité mise en mouvement pendant chaque demi-révolution.

Soient CKDEC (*fig.* 63) la circonférence décrite par le

Fig. 63.



milieu du conducteur mobile, le mouvement ayant lieu dans le sens de la flèche XX' la direction de la projection horizontale des lignes magnétiques du champ; O la projection de l'axe de rotation en même temps que le centre

de l'instrument, où nous supposons placé un pôle magnétique d'intensité μ, II′ et HH′ les projections de deux positions voisines du conducteur mobile.

Désignons par α l'angle KOI, par $d\alpha$ le petit angle IOH, et par $d\theta$ le temps employé par le conducteur annulaire pour passer de la position projetée en IOI′ à la position projetée en HOH′.

La quantité dq d'électricité mise en mouvement pendant l'intervalle de temps $d\theta$ est égale au produit de la différence des projections des deux cercles II′ et HH′ sur le plan vertical projeté YY′ par l'intensité horizontale h du magnétisme terrestre, divisé par la résistance totale du circuit, R, ou à

$$\frac{\pi r^2 h[\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha]}{R},$$

r étant le rayon de la circonférence mobile, égal à OK.

L'intensité i du courant, qu'on peut considérer comme constant pendant ce mouvement, $d\theta$ étant infiniment petit, est :

$$i = \frac{\pi r^2 h[\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha]}{R d\theta}.$$

Si la rotation est rapide, ce courant produit sur l'aiguille le même effet qu'un courant continu et constant qui parcourrait un conducteur supposé invariable, projeté en II′, et dont l'intensité I serait, en représentant par T la durée d'une demi-révolution :

$$I = \frac{i d\theta}{T} = \frac{\pi r^2 h[\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha]}{RT}.$$

Ce courant développe sur le pôle magnétique, μ, situé au centre O du cadre, une force OM, normale au plan projeté en OI et égale à

$$\frac{2\pi r I \mu}{r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2\pi I \mu}{r},$$

qu'on peut décomposer en deux forces OF et OG dirigées suivant les axes OX et OY'. On n'a pas à tenir compte de la première composante, car, lorsque le plan de l'anneau passe en tournant dans une position JJ' symétrique par rapport à l'axe XX', la force qu'il développe sur le pôle magnétique donne lieu à une composante suivant OX' égale et de direction contraire à OF. Quant à la composante OG, suivant l'axe OY', elle est

$$\frac{2\pi I\mu}{r}\cos \text{MOG} = \frac{2\pi I\mu}{r}\cos\alpha,$$

ou enfin, en remplaçant I par sa valeur,

$$\frac{2\pi^2 r\mu h \cos\alpha[\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha]}{\text{RT}}.$$

On a l'action totale du cadre mobile sur le pôle magnétique en faisant la somme des actions semblables pour toute les valeurs de α, ou en prenant l'intégrale de cette expression depuis $\alpha = -90°$ jusqu'à $\alpha = 90°$, ce qui donne pour la force à laquelle est soumis le pôle magnétique μ (*) :

$$f = \frac{\pi^3 r\mu h}{\text{RT}}.$$

(*) En remplaçant $\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha$ par $d\sin\alpha$, on a pour la différentielle de la force f :

$$df = \frac{2\pi^2 r\mu h}{\text{RT}}\cos\alpha\, d\sin\alpha,$$

d'où

$$f = \frac{2\pi^2 r\mu h}{\text{RT}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\, d\sin\alpha;$$

or

$$\int\cos\alpha\, d\sin\alpha = \int\cos^2\alpha d\alpha = \frac{\alpha + \cos\alpha\sin\alpha}{2},$$

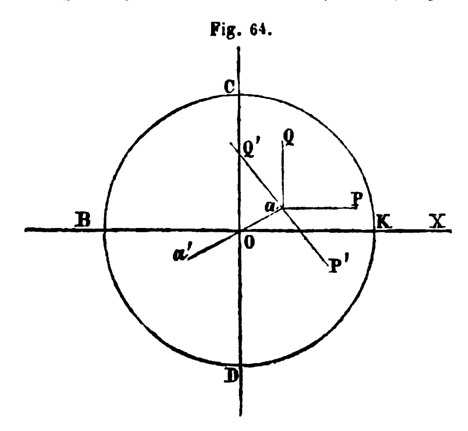
dont la valeur de $\alpha = -\frac{\pi}{2}$ à $\alpha = \frac{\pi}{2}$ est égale à $\frac{\pi}{2}$; on est donc conduit à la formule

$$f = \frac{\pi^3 r\mu h}{\text{RT}}.$$

245. Supposons le pôle magnétique μ, que nous avons considéré au centre du cadre mobile, remplacé par un petit aimant mobile, de dimension assez petite par rapport au rayon du cadre pour qu'on puisse, comme dans la boussole de tangentes, considérer l'action sur les deux pôles comme étant la même que s'ils étaient situés au centre.

L'aiguille étant d'abord orientée dans la direction du méridien magnétique, suivant OX (*fig.* 64), prend, sous

Fig. 64.



l'action combinée du magnétisme terrestre et du courant induit qui se développe dans le cadre pendant la rotation, une situation d'équilibre aa', et forme avec la direction du magnétisme terrestre, OX, un angle $a\mathrm{OK} = \delta$ qu'on peut observer en fixant sur le fil de suspension, extérieurement à l'anneau mobile, un petit miroir qui réfléchisse sur une échelle graduée l'image d'un point lumineux.

L'équation de l'équilibre s'établit comme pour la boussole de tangentes, ordinaire. L'action magnétique de la terre produit sur le pôle a une force $a\mathrm{P}$ parallèle à OX, égale à μh, dont la composante suivant la ligne $a\mathrm{P}'$, normale à l'aiguille, est $\mu h \sin \delta$.

L'action électro-magnétique du cadre mobile produit une force $aQ = f$, parallèle à OC, dont la composante aQ' normale à l'aiguille est $f \cos \delta$.

Dans la situation d'équilibre, on a :

$$f \cos \delta = \mu h \sin \delta,$$

ou, en remplaçant f par la valeur trouvée plus haut :

$$\frac{\pi^2 r \mu h}{RT} \cos \delta = \mu h \sin \delta;$$

d'où l'on tire

$$\frac{\pi^2 r}{RT} = \text{tang}\, \delta,$$

et par suite

$$R = \frac{\pi^2}{\text{tang}\, \delta} \times \frac{r}{T}.$$

On a donc en valeur absolue la résistance R lorsqu'on connaît la déviation δ, le rayon r de l'anneau et la durée T d'une demi-révolution, et pour effectuer cette détermination, on n'a besoin de connaître ni la force magnétique de l'aimant, ni l'intensité du magnétisme terrestre.

La résistance est exprimée par le multiple du rapport d'une longueur à un intervalle de temps, c'est-à-dire par une vitesse, comme on devait s'y attendre (n° 228).

Si le fil forme n tours sur le cadre, son action sur l'aiguille est n^2 fois plus considérable, puisque le courant induit est lui-même n fois plus grand ; la force f devient donc :

$$f = \frac{n^2 \pi^2 h \mu r}{T}$$

et la résistance R :

$$R = \frac{n^2 \pi^2}{\text{tang}\, \delta} \times \frac{r}{T};$$

ou, si u désigne la vitesse de rotation angulaire $\frac{\pi}{T}$,

$$R = \frac{n^2 \pi^3 r u}{\text{tang}\, \delta}.$$

Enfin si L est la longueur du fil enroulé, $L = 2n\pi r$ et la formule devient :

$$R = \frac{L^2 u}{4r \tan \delta}.$$

Tel est le principe de la méthode employée par la commission de l'Association britannique pour la détermination de l'unité absolue de résistance; mais il y a un certain nombre de corrections à introduire dans la formule pour tenir compte de la torsion du fil de suspension, de la différence de rayon des divers tours de fil, de leurs positions différentes par rapport à l'axe, etc.

246. Les expériences ont été faites à deux reprises différentes, en 1863 et 1864, à King's college, par MM. Maxwell, Jenkin, Balfour Stewart et Hockin, au moyen d'un appareil construit avec le plus grand soin par MM. Elliot frères.

Cet appareil consistait en une bobine tournante de 0m,30 de diamètre soutenue par un fort bâtis en fonte; elle était mise en mouvement par un moteur qui lui imprimait une vitesse qu'on pouvait faire varier de 100 à 500 révolutions par minute. L'aimant était de très petite dimension, ce qui rendait à peu près nulle son action inductrice sur le conducteur; il était suspendu au centre du cadre au moyen d'une tige soutenue par un fil de cocon de 2m,50 environ de longueur renfermé dans un conduit et à l'abri des courants d'air. Un petit miroir fixé sur la tige, au-dessus du cadre, réfléchissait sur une échelle graduée l'image d'un point lumineux, et faisait connaître la déviation.

Quant au fil enroulé sur le cadre, et dont on cherchait la résistance absolue, c'était un fil de cuivre 1mm,5 de diamètre environ qui, dans les premières expériences, faites en 1863, avait 302m,068 de longueur et formait

307 tours; dans la seconde série d'expériences, faites en 1864 avec le même appareil, le fil formait 313 tours et avait un développement de $311^m,118$.

La résistance du fil du cadre, que l'expérience donnait en unités absolues, était aussitôt comparée par les procédés galvanométriques ordinaires, à celle d'un conducteur étalon maintenu à une température constante, dont on déterminait ainsi la résistance absolue.

Le rapport de la longueur de ce dernier à la valeur de sa résistance, déterminée par cette méthode, faisait connaître l'unité absolue de résistance exprimée par une longueur de ce fil.

Nous donnerons la description complète de l'appareil; pour le moment nous nous bornerons à l'indication sommaire de l'une des expériences.

Avec le premier conducteur de $302^m,063$ de longueur, on obtenait une déviation de l'aiguille de $3°15'$, pour une rotation de 408 tours par minute. En appliquant la formule précédente :

$$R = \frac{L^2 u}{Lr \operatorname{tang} \delta},$$

et en faisant :

$$L = 302^m,063, \quad u = \frac{\pi}{T} = \frac{\pi \times 2 \times 408}{60} = 42,72, \quad r = 0,15 \text{ et } \delta = 3°15',$$

on trouve :

$$R = 111.470.000 \text{ unités absolues de résistance } \left(\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}\right).$$

La grandeur de l'unité absolue exprimée par une longueur de fil de même nature que celui de la bobine est donnée par le rapport $\frac{302^m,063}{111.470.000}$, si l'on ne tient pas compte des corrections à introduire.

L'unité de résistance ainsi obtenue, $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$, est beau-

coup trop petite pour les usages ordinaires; aussi est-ce un multiple de cette unité qu'on a adopté dans la pratique. Ce multiple est le produit de l'unité absolue, $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ par 10^7.

Cette unité était, dans l'expérience que nous venons de citer, représentée approximativement par $\frac{302^{m},060}{11,147}$ du fil qui servait à l'expérience.

Ainsi qu'on vient de le dire, les expériences ont été faites en 1863 et 1864; c'est de la moyenne trouvée dans les deux séries qu'on a déduit la valeur de l'unité absolue, dite unité BA de l'Association britannique et nommée Ohmad ou Ohm, dont un certain nombre de types ont été conservés dans les archives de l'Association, et dont des copies sont distribuées aux physiciens qui en font la demande.

Cet étalon offre la même résistance qu'une colonne de mercure à 0° centigrade, de 1 millimètre carré de section, et dont la longueur serait égale à $1^{m},026$ et est exprimée par ce chiffre en unités Siemens (unité 1862).

247. *Induction dans un champ magnétique varié.* — Nous avons considéré jusqu'ici l'induction développée dans un conducteur en mouvement dans une champ magnétique uniforme; les mêmes principes s'appliquent au cas où le conducteur se meut dans un champ quelconque, tel que celui qui est dû à la présence d'un ou plusieurs aimants.

La quantité d'électricité développée peut se calculer en décomposant la marche du conducteur de façon à n'avoir à considérer, à chaque instant, pour chacun de ces éléments, qu'un déplacement infiniment petit dans un champ sensiblement uniforme.

On obtient ainsi la quantité d'électricité dQ mise en circulation pendant un intervalle de temps très court dt : on en déduit l'intensité du courant $I = \frac{dQ}{dt}$, et la force électromotrice $E = IR$, R représentant la résistance du circuit.

La quantité dQ d'électricité et l'intensité I du courant sont, ainsi qu'on l'a vu (n° 230), en raison inverse de la résistance totale du circuit, R, et, par conséquent, la force électromotrice est indépendante de cette résistance.

248. — On peut, par cette méthode, calculer l'intensité du courant induit développé dans un conducteur rectiligne tournant, d'un mouvement uniforme, autour d'un pôle magnétique.

L'effet est le même si, le conducteur restant fixe, le pôle magnétique tourne autour de lui; on a ainsi un courant induit développé dans un conducteur invariable par le simple déplacement des lignes de force.

249. — Enfin, l'induction se produit également sans mouvement matériel, lorsque l'intensité magnétique du champ dans lequel se trouve un conducteur se modifie par suite de l'aimantation ou de la désaimantation de barreaux de fer doux, ou par la variation d'intensité d'un courant dans un circuit voisin.

On arrive, par exemple, à la conception du courant induit qui se développe dans un conducteur enroulé autour d'un électro-aimant au moment de l'aimantation ou de la désaimantation de ce dernier en le supposant aimanté préalablement et en admettant qu'il soit brusquement amené d'une distance infinie à sa position qu'il occupe dans le conducteur, ou inversement qu'il s'en éloigne.

Un courant induit développe, soit en échauffant les conducteurs qu'il traverse, soit en produisant un travail quelconque de l'énergie qui doit correspondre à la perte d'une quantité équivalente de force vive. Cette force vive est fournie par l'énergie qu'il faut dépenser pour aimanter le fer doux, et correspond soit au travail dépensé à faire mouvoir des aimants, soit à la chaleur perdue dans les combinaisons chimiques de la pile.

CHAPITRE XI.

COMPARAISON DES UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES ET DES UNITÉS ÉLECTROMAGNÉTIQUES.

Unités électrostatiques.

250. Ainsi qu'on l'a vu, les grandeurs électriques principales au nombre de cinq, la quantité Q, l'intensité du courant I, la force électromotrice E, la résistance R et enfin la capacité électrostatique S sont reliées entre elles et aux grandeurs mécaniques par les équations :

$$Q = It \qquad (1)$$

$$I = \frac{E}{R} \qquad (2)$$

$$W = IEt \qquad (3)$$

$$Q = ES \qquad (4)$$

auxquelles on joint, dans le système électrostatique, la relation :

$$F = \frac{Q^2}{r^2}. \qquad (5)$$

Dans ces équations Q est la quantité d'électricité transmise pendant l'intervalle de temps t par le cou-

rant dont l'intensité I est égale à $\frac{E}{R}$, ou qui se trouve répandue sur un condensateur dont la capacité électrostatique est S et dont les armatures sont maintenues à une différence de potentiel égale à E; W est le travail équivalent à la chaleur dégagée par le courant I dans un conducteur dont les deux extrémités sont maintenues à une différence de potentiel égale à E; enfin, F est la force avec laquelle s'attirent deux quantités d'électricité égales à Q, situées à une distance r.

251. Dans la première partie de ce travail nous avons défini le potentiel électrique en un point comme étant la somme $V = \sum \frac{q}{r}$ des rapports des masses électriques contenues dans l'espace à leurs distances au point considéré, et la force électromotrice entre deux points comme étant la différence $E = V - V'$ des potentiels en ces deux points. En partant de ces définitions nous sommes arrivés à ce résultat que le travail exécuté par l'unité de quantité d'électricité lorsqu'elle passe d'un point à un autre est égal à la différence des potentiels de ces points, ou à la force électromotrice qui agit entre eux, et que le travail W effectué par une quantité Q d'électricité, en passant du potentiel V au potentiel V', est égal à $Q(V - V')$, ce qui conduit à l'équation :

$$W = Q(V - V') = QE,$$

ou

$$W = IEt.$$

On peut partir de cette dernière équation et en la combinant avec la formule de Coulomb $F = \frac{Q^2}{r^2}$ ou plutôt $F = \frac{QQ'}{r^2}$, les quantités Q et Q' étant en général inégales,

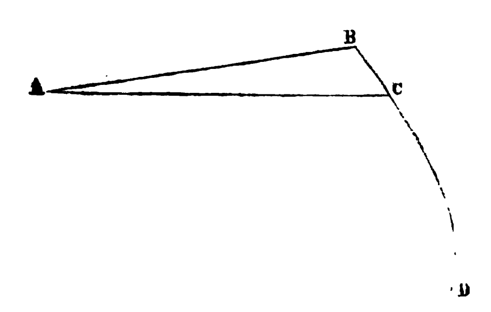
en déduire la valeur du potentiel $V = \sum \frac{q}{r}$, ou de la force électromotrice entre deux points,

$$E = V - V' = \sum \frac{q}{r_1} - \sum \frac{q}{r_2}.$$

Supposons en effet qu'une quantité Q d'électricité, soumise à l'action d'un certain nombre de masses électriques q, q', q'', etc., situées à des distances r, r', r'', etc., se déplace ; on aura le travail total effectué par Q en faisant la somme des travaux dus aux forces exercées par chacune des masses q, q', q'', etc.

Si B (*fig.* 65) est le point où se trouve placée la masse

Fig. 65.



électrique Q, soumise à l'action d'une quantité d'électricité q située en A, à une distance $AB = r$, la force F qui agira sur elle, sera $F = \frac{Qq}{r^2}$, cette force étant répulsive lorsque Q et q sont de même signe.

Lorsque la masse Q se déplace d'une petite quantité BC, le travail qu'elle accomplit est égal au produit de la force F par la différence des longueurs AC et AB, qu'on peut représenter par dr, ou à $\frac{Qqdr}{r^2}$.

Le travail effectué, quand la masse Q passe du point B à un point D, est donc

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{Qq\,dr}{r^2} = Qq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

r_1 et r_2 étant les distances des points B et D au point A.

Le travail total W dû aux forces qui émanent des diverses masses magnétiques q, q', q'', etc. qui se trouvent dans le champ, est :

$$W = Q\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r'_1} - \frac{q'}{r'_2} + \frac{q''}{r''_1} - \frac{q''}{r''_2} + \text{etc.}\right).$$

Ce travail étant aussi égal à QE, par définition, on a pour la valeur de la force électromotrice ou de la différence des potentiels entre les deux points

$$E = V - V' = \frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2} + \frac{q'}{r'_1} - \frac{q'}{r'_2} + \frac{q''}{r''_1} - \frac{q''}{r''_2} + \text{etc.} = \sum \frac{q}{r_1} - \sum \frac{q}{r_2},$$

ou, si le point D est situé à l'infini :

$$E = V = \frac{q}{r_1} + \frac{q'}{r'_1} + \frac{q''}{r''_1} + \text{etc.} = \sum \frac{q}{r}.$$

252. *Dimensions des unités électrostatiques.* — Des cinq équations précédentes on déduit, en faisant t, W, F et r égaux aux unités, et en remplaçant W et F par leurs valeurs en fonction des unités principales L, M et T, les dimensions des cinq unités électriques principales, que nous avons déjà données, et que nous représenterons dans le système électrostatique par l'indice s

$$Q_s = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T},$$

$$I_s = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$$

$$E_s = \frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T},$$

$$R_s = \frac{T}{L},$$
$$S_s = L.$$

Pour avoir la valeur de ces diverses unités, il suffit de chercher le nombre qui représente une quantité connue, et de diviser cette quantité par le nombre qui exprime sa grandeur

253. *Mesure des grandeurs en unités électrostatiques.* — La mesure de la différence des potentiels entre deux points s'effectue au moyen d'un électromètre préalablement gradué ou d'un électromètre absolu (n° 70) ; celle de la capacité électrostatique par comparaison avec un condensateur étalon (n° 80). La quantité d'électricité que possède un conducteur électrisé est égale au produit de sa capacité par la différence de potentiel des armatures.

La résistance d'un conducteur peut se mesurer en unités électrostatiques, lorsqu'elle est très considérable, par la vitesse avec laquelle décroît la différence de potentiel des armatures d'un condensateur électrisé lorsqu'elles sont mises en communication à l'aide de ce conducteur, en appliquant la formule donnée au n° 122

$$R = \frac{t}{S \log \text{nép.} \frac{V_1}{V_2}}.$$

Enfin, l'intensité du courant qui traverse un conducteur est égale au rapport $\frac{E}{R}$ de la différence E des potentiels aux deux extrémités de ce conducteur à sa résistance R.

Unités électromagnétiques.

254. Dans le système électromagnétique les gran-

deurs électriques se déterminent au moyen des équations précédentes (1) (2) (3) et (4) du n° 250 auxquelles on joint la relation

$$f = \frac{\mu I ds \sin \alpha}{r^2}, \qquad (6)$$

dans laquelle f est la force absolue à laquelle est soumis un pôle magnétique d'intensité μ sous l'action d'un élément de courant Ids situé à une distance r et formant un angle α avec la ligne qui joint son centre au pôle magnétique.

Cette dernière équation n'est pas directement applicable, mais elle peut être remplacée par une de celles qui ont été données aux numéros 183, 184, etc., qui conduisent à plusieurs définitions de l'unité électro-magnétique d'intensité.

255. On peut ne pas faire intervenir l'unité de pôle magnétique en remarquant que l'unité électromagnétique d'intensité est égale à l'unité électrodynamique, telle qu'elle a été définie au n° 156, multipliée par $\sqrt{2}$ (n° 190).

On peut dire, par exemple, que l'unité électromagnétique d'intensité est celle du courant qui en traversant un conducteur rectiligne indéfini et un courant rectiligne parallèle fini, situé à une distance du premier égale à sa propre longueur, développe entre les deux circuits une force attractive égale à deux unités absolues de force. On a en effet dans le système électrodynamique pour la force f qui agit entre un courant indéfini d'intensité J et un courant fini d'intensité J′ de longueur l et situé à une distance d

$$f = \frac{JJ'l}{d},$$

ou, si I et I′ sont les intensités dans le système électro-

magnétique,

$$f = \frac{2II'l}{d},$$

qui donne F = 1 si I = I' = 1, $l = d$ et $f = 2$,

256. *Intensité.*—L'intensité, dont les dimensions dans le système électromagnétique sont

$$I_m = \frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T},$$

se mesure, lorsque la composante horizontale du magnétisme terrestre, h, est connue, au moyen d'une boussole de tangentes à cadre circulaire, en appliquant la formule (n° 191) :

$$I = \frac{hr^2}{l} \operatorname{tang} \theta.$$

L'intensité ainsi déterminée est celle du courant modifié par l'introduction de l'instrument, mais on peut, par une seconde détermination, effectuée en intercalant dans le circuit une résistance additionnelle ayant un rapport connu avec celle du fil du galvanomètre, en déduire l'intensité du courant primitif (n° 199).

Le rayon r du cadre du fil, la longueur l, et la composante horizontale h du magnétisme terrestre doivent être exprimés en fonction des mêmes unités que celles qui doivent représenter l'intensité I.

Ainsi, si l'on admet comme unités fondamentales pour l'intensité, le mètre, la seconde et la masse du gramme, le rayon du cadre r et la longueur l du fil doivent être exprimés en mètres et la composante horizontale du magnétisme terrestre doit être fonction des mêmes unités. On a vu que le chiffre trouvé pour cette valeur à Paris, en 1870, par MM. Cornu et Baille est 1,920 (n° 174).

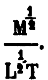
Si l'on adoptait le centimètre pour l'unité de longueur, en conservant la masse du gramme et la seconde pour les deux autres unités, l et r devraient être exprimés en centimètres, et l'intensité horizontale h du magnétisme terrestre serait 0,192 *.

257. La valeur de la composante horizontale du magnétisme terrestre étant variable, la boussole de tangentes ne peut donner l'intensité absolue que si cette composante a été déterminée au moment de l'expérience. On a vu comment, en faisant traverser au courant un circuit enroulé sur un cadre circulaire mobile autour d'un axe vertical, en même temps que le fil d'un galvanomètre, on peut mesurer simultanément la valeur de cette composante et celle de l'intensité, si l'on a déterminé le coefficient de torsion des fils de suspension (n° 198).

258. L'intensité absolue peut s'obtenir directement au moyen de l'électro-dynamomètre de Weber, formé de deux bobines dont l'une est fixe tandis que l'autre, mobile, est suspendue au centre de la première ou à une assez grande distance, en appliquant les formules données aux n[os] 195 et 196, ou en déterminant préalablement par expérience la constante de l'instrument, dont l'emploi est à l'abri des variations du magnétisme terrestre.

259. Une autre méthode, employée par Joule, consiste à suspendre à l'un des plateaux d'une balance très sensible une bobine plate horizontale mobile entre deux bobines semblables fixes et à faire parcourir au courant les trois bobines de façon que les actions des deux bo-

(*) Les dimensions de h sont en effet (n° 165) :



$$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}T}.$$

bines fixes sur celle qui est mobile s'ajoutent; l'intensité du courant se déduit du poids qu'il faut ajouter dans le second plateau de la balance pour ramener la bobine mobile à sa position normale. Ce poids est proportionnel au carré de l'intensité de courant, et il suffit de comparer une fois pour toutes les indications de l'instrument à celles d'une boussole de tangentes, à un moment où la composante horizontale du magnétisme terrestre est connue, pour avoir la constante de l'instrument, qu'on peut du reste déduire directement de l'écartement et de la dimension des bobines.

260. Les phénomènes électrochimiques fournissent également un moyen de déterminer l'intensité absolue d'un courant.

Il résulte des expériences de sir William Thomson qu'un courant ayant l'unité électromagnétique absolue d'intensité (mètre, seconde, masse de gramme), décompose pendant une seconde un poids d'eau égal à $0^{gr}.0092$ et, par conséquent, met en liberté $0^{gr}.00816$ d'oxygène et $0^{gr},00104$ d'hydrogène.

Le poids d'un métal qui pendant une seconde serait précipité, par un courant égal à l'unité, d'un sel en dissolution, serait donc, en représentant par A son équivalent chimique par rapport à l'hydrogène,

$$A \times 0^{gr},00104.$$

Un courant d'intensité I fonctionnant pendant un intervalle de temps égal à t secondes précipitera sur l'électrode négative d'un voltamètre un poids de métal égal à

$$IAt \times 0^{gr},00104;$$

on en déduit pour l'intensité absolue du courant. Si P

est le poids en grammes du métal réduit dans un temps t :

$$I = \frac{P}{tA \times 0,00104}.$$

Ainsi, par exemple, l'équivalent du cuivre étant 31,7, l'intensité absolue du courant qui, en traversant un voltamètre à sulfate de cuivre pendant un temps égal à t secondes, réduirait un poids P de cuivre, est donnée par la formule.

$$I = \frac{P}{t \times 31,7 \times 0,00104} = \frac{P}{t \times 0,03297}.$$

Si les équivalents chimiques des métaux par rapport à l'hydrogène et l'équivalent électrique de l'hydrogène étaient connus avec une précision suffisante, cette méthode fournirait un moyen commode d'avoir l'intensité absolue d'un courant constant et d'en déduire la composante horizontale du magnétisme terrestre, en comparant l'intensité ainsi trouvée avec la déviation de l'aiguille d'une boussole de tangentes placée dans le même circuit; on aurait en effet en adoptant les notations et les chiffres précédents :

$$I = \frac{hr^2 \tang \theta}{l} = \frac{P}{tA \times 0,00104},$$

d'où

$$h = \frac{lP}{r^2 tA \tang \theta \times 0,00104}.$$

261. ***Quantité.***— La quantité Q d'électricité qui traverse un conducteur pendant un intervalle de temps t est, si l'intensité I du courant est constante,

$$Q = It.$$

Lorsque l'intensité est variable, elle est représentée par l'intégrale :

$$Q = \int_0^t I\,dt.$$

Les dimensions de cette grandeur dans le système électromagnétique sont (n° 227) :

$$Q_m = L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}.$$

On peut mesurer la quantité d'électricité que prend ou que possède un conducteur en faisant passer la charge ou la décharge à travers le fil d'un galvanomètre ; cette quantité est donnée par la formule (n° 214) :

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times th}{N\pi},$$

si N est la constante du galvanomètre, ou par les formules

$$Q = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha \times thr}{n\pi^2}$$

et

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times thr^2}{l\pi},$$

si le cadre du galvanomètre est circulaire, de rayon r, si l est la longueur du fil et n le nombre de tours.

Ces formules ne sont rigoureusement exactes que si la charge ou la décharge dure assez peu de temps pour pouvoir être considérée comme instantanée.

On peut néanmoins s'en servir pour mesurer la charge que prend le conducteur d'un câble sous-marin lorsqu'on le met en communication avec une source électromotrice, ou lorsque, le câble étant chargé, on en opère la décharge, bien que le courant dure un certain temps.

On n'a pas, il est vrai, la mesure absolument exacte de la quantité d'électricité prise ou abandonnée par le conducteur, mais toutefois la partie principale de la charge ou de la décharge s'écoulant rapidement, on a une approximation suffisante.

262. L'unité de quantité est transmise pendant l'unité de temps par l'unité de courant. Le courant dont l'intensité est égale à l'unité, en traversant pendant une seconde, un voltamètre à eau acidulée décompose $0^{gr},0092$ d'eau, et met en liberté $0^{gr},00104$ d'hydrogène et $0^{gr},00816$ d'oxygène ; ces trois nombres correspondent donc à l'unité de quantité d'électricité et sont appelés les équivalents électrochimiques de l'eau, de l'hydrogène et de l'oxygène.

Plus généralement si A est l'équivalent chimique d'un corps simple tel qu'un métal, le poids de ce métal qui est précipité d'un sel, dont il constitue l'élément négatif, par le passage de l'unité de quantité d'électricité, est $A \times 0,00104$ grammes; ce poids représente l'équivalent électrochimique du métal.

Il paraîtrait naturel de remplacer les équivalents chimiques ordinaires, pris arbitrairement par rapport à un corps simple donné, hydrogène ou oxygène, par les équivalents électrochimiques fondés sur la mesure absolue des courants ;

L'équivalent absolu de l'hydrogène serait. . .	0.00104
Celui de l'oxygène.	0,00816
— de l'eau.	0,00920
— du zinc.	0,03400
— de l'argent.	0,11232
etc.	

263. *Force électromotrice.* — La force électromotrice qui a pour dimension (n° 227)

$$E_m = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2},$$

se déduit de l'intensité I du courant qu'elle produit sur un circuit de résistance R, lorsque I et R sont connus en

unités absolues, en appliquant la formule d'Ohm

$$E = IR.$$

L'intensité I peut être donnée par une boussole de tangentes, ou un électrodynamomètre; quant à la résistance R du circuit entier, si elle n'est pas connue, on peut y suppléer en introduisant successivement d'abord le galvanomètre seul dans le circuit, puis le même galvanomètre avec une résistance connue ρ. Si I_1 et I_2 sont les intensités observées dans les deux cas, la force électro motrice E est donnée par la formule (n° 199) :

$$E = \frac{I_1 I_2 \rho}{I_1 - I_2}.$$

264. Lorsque la force électromotrice est due à une action chimique, on peut déduire sa valeur, comme nous l'avons fait dans l'étude des phénomènes électrostatiques, de la chaleur dégagée par la combinaison des éléments qui réagissent les uns sur les autres, chaleur qui peut être connue par d'autres méthodes, à la condition qu'il ne se produise pas d'action secondaire dans la pile.

La chaleur développée dans un circuit, pendant un intervalle de temps t, par une force électromotrice E produisant un courant d'intensité I est équivalente à une quantité de travail absolu égale à IEt, ou à $nIEt$ si n est le nombre des éléments dont se compose la pile, chacun d'eux ayant une force électromotrice égale à E.

Si nous supposons, comme nous l'avons admis jusqu'ici, I et E exprimés en fonction du mètre, de la masse du gramme et de la seconde, la quantité $nIEt$ est équivalente à un nombre de grammes-mètres égal à

$$\frac{nIEt}{9{,}809}.$$

Soit C l'équivalent mécanique de la chaleur rapporté au gramme d'eau et au gramme-mètre, c'est-à-dire le nombre de grammes-mètres qui correspond à l'élévation de 1 degré centigrade de 1 gramme d'eau, on a $1^{gr\,m} = \frac{1}{C}$ calories ; la quantité de travail absolu $nIEt$ est donc équivalente à

$$\frac{nIEt}{C \times 9{,}809} \text{ calories.}$$

Cette chaleur doit être égale à celle que produit la combinaison des éléments dans la pile. Or, le nombre des équivalents d'un métal, qui se combinent pendant un intervalle de temps t dans un couple voltaïque traversé par un courant d'intensité I, est : $It \times 0{,}00104$, et le nombre d'équivalents qui entrent en combinaison dans la pile entière est égal à :

$$nIt \times 0{,}00104.$$

Si ch représente la chaleur dégagée par la combinaison d'un équivalent de métal, la chaleur fournie sera

$$nIt \times 0{,}00104\, ch,$$

ce qui conduit à l'équation

$$\frac{nIEt}{C \times 9{,}809} = nIt \times 0{,}00104 \times ch,$$

d'où l'on tire :

$$E = C \times ch \times 0{,}01020136.$$

Si l'on admet 425 pour l'équivalent mécanique C de la chaleur

$$E = ch \times 4{,}3355.$$

Pour l'élément Daniell, par exemple, la quantité de chaleur, ch, développée par la substitution d'un équivalent

de zinc au cuivre, dans le sulfate de cuivre, est égale à 25502 calories; on est donc conduit pour la force électromotrice de cet élément à la valeur

$$E = 25502 \times 4,335$$

ou

$$E = 110.551,$$

qui diffère peu du nombre 107000 auquel conduit la mesure directe.

On arrive au chiffre 113400, si l'on prend pour l'équivalent de la chaleur le chiffre 436 admis aujourd'hui par la plupart des physiciens.

Ce procédé ne pourrait être employé dans la pratique parce que les chaleurs de combinaison ne sont pas assez exactement connues, et qu'il se produit presque toujours dans les piles des actions secondaires qui modifient leur force électromotrice.

265. ***Résistance.*** — Dans le système électromagnétique la résistance d'un conducteur est représentée comme une vitesse, par le rapport d'une longueur à un intervalle de temps (nº 227) et a pour dimensions :

$$R_m = \frac{L}{T}.$$

Si une force électromotrice, E, était connue en unites absolues, on en déduirait la résistance totale du circuit. en appliquant la formule :

$$I = \frac{E}{R},$$

l'intensité I pouvant se déduire de la déviation de l'aiguille d'une boussole de tangentes. On aurait également la résistance r d'un conducteur quelconque en observant l'intensité du courant lorsque ce conducteur est dans le

circuit et lorsqu'il est enlevé, au moyen des deux formules :

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad I_1 = \frac{E}{R + r},$$

qui donnent :

$$r = \frac{E(I - I_1)}{II_1}.$$

La force électromotrice due aux actions chimiques ne peut être déterminée directement assez exactement par la chaleur de combinaison et n'est pas assez constante pour qu'on puisse s'en servir pour la détermination de la résistance absolue d'un conducteur et en déduire l'unité de résistance; on a dû avoir recours à la force électromotrice développée par l'induction dans un conducteur en mouvement dans un champ magnétique uniforme, qui est une fonction parfaitement définie de l'intensité du champ, de la vitesse du conducteur et de la direction de son mouvement par rapport aux lignes de force. On a vu dans le chapitre précédent comment en faisant tourner un conducteur on peut, par diverses méthodes, effectuer cette détermination.

266. Une autre méthode pour déterminer la résistance d'un conducteur consiste à mesurer la quantité de chaleur qu'il absorbe lorsqu'il est traversé par un courant dont l'intensité est connue.

Si R est la résistance absolue d'un conducteur, le travail absolu W correspondant à la chaleur qu'il absorbe pendant un intervalle de temps t, lorsqu'il est parcouru par un courant d'intensité I, est

$$W = I^2Rt.$$

Ce travail est égal à $\frac{I^2Rt}{9,809}$ grammes-mètres, et est

équivalent à $\frac{I^2Rt}{C \times 9,809}$ calories, C étant l'équivalent de la chaleur correspondant au gramme-mètre.

Si donc on considère l'équivalent C de la chaleur comme connu, on peut, en disposant un conducteur dans un calorimètre et en mesurant la quantité de chaleur en calories, *ch*, qu'il dégage lorsqu'il est traversé par un courant dont l'intensité I est mesurée en unités absolues, en déduire sa résistance R par l'équation :

$$ch = \frac{I^2Rt}{C \times 9,809},$$

d'où

$$R = \frac{C \times ch \times 9,809}{I^2t},$$

ou

$$R = \frac{4.168,825 \times ch}{I^2t},$$

si l'on admet 425 pour la valeur de C.

Ou bien l'on peut, si la résistance R est connue en unités absolues par une méthode différente, déduire de l'équation précédente l'équivalent mécanique C de la chaleur, sur la valeur exacte duquel les physiciens ne sont pas encore complètement d'accord :

$$C = \frac{I^2Rt}{9,809 \times ch}.$$

267. L'expérience a été faite avec beaucoup de soin en 1866 et 1867 par M. Joule.

Le calorimètre dont il s'est servi était un vase de cuivre contenant environ cinq litres d'eau, dans lequel était plongé un fil conducteur, formé d'un alliage de platine et d'argent, dont la résistance à peu près égale à 1 ohm (10^7 unités absolues, mètre, seconde et masse du gramme) se déterminait exactement par les procédés

galvanométriques ordinaires par comparaison avec un étalon de l'Association britannique.

Un thermomètre gradué avec soin faisait connaître l'échauffement de l'eau du calorimètre et permettait d'en déduire la quantité de chaleur absorbée.

Quant à l'intensité du courant elle était donnée simultanément par une boussole de tangentes et par une balance électrodynamique (n° 259) dont la constante avait été préalablement déterminée.

La manœuvre de ce dernier instrument étant assez délicate, on s'en servait seulement au commencement de chaque série d'essais pour déterminer, par comparaison avec la déviation de l'aiguille de la boussole de tangentes pour un même courant, l'intensité du magnétisme terrestre.

M. Joule a déduit l'équivalent mécanique de la chaleur de trois séries d'expériences dont la moyenne l'a conduit au chiffre 430, représentant le nombre de grammes-mètres équivalent à la chaleur nécessaire pour élever de 1° centigrade 1 gramme d'eau, ou le nombre de kilogrammètres qui correspondent à une calorie, rapportée au kilogramme.

Ce nombre est supérieur au chiffre 425 primitivement admis, mais il est encore inférieur au chiffre auquel on a été conduit par des expériences récentes, qui est environ 436.

268. *Capacité électrostatique.* — La capacité électrostatique S d'un condensateur est donnée par l'équation :

$$S = \frac{Q}{E}$$

dans laquelle Q est la charge du condensateur correspondant à une différence de potentiel E des armatures.

Si Q et E sont égaux aux unités électromagnétiques Q_m et E_m de quantité et de force électromotrice, S devient égal à l'unité de capacité électrostatique S_m ; c'est celle d'un condensateur qui prendrait l'unité de charge lorsque les armatures sont maintenues à une différence de potentiel égale à l'unité. Les dimensions de cette grandeur se déduisent de l'équation $S_m = \frac{Q_m}{E_m}$, en remplaçant Q_m et E_m par leurs dimensions :

$$S_m = \frac{T^2}{L}.$$

Dans le système électromagnétique la valeur de la capacité électrostatique variant avec l'unité de temps ne dépend pas seulement de la forme du condensateur, et ne peut jamais être représentée par une fonction simple de ses dimensions, comme il arrive dans le système électrostatique, lorsqu'il est formé de deux sphères concentriques ou de deux plans parallèles (n° 54).

269. Pour avoir la valeur électromagnétique de la capacité d'un condensateur, on mesure la charge Q qu'il prend lorsque les deux armatures ont une différence de potentiel connue E; le rapport de ces deux grandeurs donne la capacité S.

La différence de potentiel est égale à la force électromotrice de la source électrique avec laquelle s'opère la charge qui est ordinairement une pile voltaïque; elle peut se déduire de l'intensité du courant produit par cette source sur un circuit total dont la résistance absolue, R, est connue par la formule

$$I = \frac{E}{R}.$$

Si, par exemple, θ est la déviation produite par le cou-

rant I sur l'aiguille d'une boussole de tangentes de rayon r, sur le cadre circulaire duquel un fil de longueur l est enroulé,

$$I = \frac{E}{R} = \frac{hr^2 \operatorname{tang} \theta}{l}$$

et par conséquent

$$E = \frac{Rhr^2 \operatorname{tang} \theta}{l}.$$

La charge Q, que prend un condensateur, s'obtient en faisant traverser à l'électricité soit pendant la charge, soit pendant la décharge, le fil d'un galvanomètre et en observant l'angle α décrit par l'aiguille. Si l'instrument employé est le même que celui qui a servi à déterminer E, on a (n° 261).

$$Q = \frac{thr \sin \frac{1}{2}\alpha}{n\pi^2} = \frac{2thr^2 \sin \frac{1}{2}\alpha}{l\pi}.$$

De ces deux équtions on tire la valeur de S

$$S = \frac{Q}{E} = \frac{2t \sin \frac{1}{2}\alpha}{R\pi \operatorname{tang} \theta}.$$

La formule devient

$$S = \frac{2t \sin \frac{1}{2}\alpha}{R_1 \pi};$$

si R_1 est la résistance totale du circuit dans lequel la force électromotrice employée produit une déviation de 45° à la boussole de tangentes dont on se sert.

270. *Unités électromagnétiques secondaires.* — En outre des cinq grandeurs principales que nous venons de passer en revue, l'étude de l'électricité en comporte un certain nombre d'autres dont nous avons donné la définition dans la première partie de ce travail et dont il est facile de déterminer les dimensions dans le système électromagnétique.

Telles sont par exemple :

La densité électrique à la surface d'un conducteur ou la

charge qui correspond à l'unité de surface (n° 36) qui est représentée par le rapport $\frac{Q}{A}$ de la charge uniforme répandue sur une surface à l'étendue A de cette surface et dont les dimensions sont : $\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}}$.

La résistance spécifique absolue d'une substance (n° 110) ou la résistance rapportée à l'unité de longueur et de volume qui a pour expression $\frac{R\omega}{l}$, R représentant la résistance d'un conducteur formé de cette substance, de longueur l et de section ω. En faisant R égal à l'unité de résistance, l égal à l'unité de longueur, et ω égal à l'unité de surface, on trouve pour les dimensions de cette grandeur : $\frac{L^2}{T}$.

La conductibilité d'un conducteur qui est l'inverse de sa résistance (n° 111), et a pour dimensions : $\frac{T}{L}$.

Enfin la conductibilité spécifique, ou la conductibilité rapportée à l'unité de longueur (n° 112), dont les dimensions sont : $\frac{T}{L^2}$.

Relations entre les unités électrostatiques et les unités électromagnétiques.

271. Les grandeurs électriques peuvent être mesurées en unités absolues soit dans le système électrostatique, soit dans le système électromagnétique.

On adopte en général le premier système pour l'étude des phénomènes d'électricité statique, et le second pour l'étude des courants électriques, en multipliant dans ce

dernier cas les unités fondamentales, correspondant au mètre, à la seconde et à la masse du gramme, par un coefficient convenable pour en rendre l'usage commode.

Il existe entre les deux systèmes d'unité un rapport qui a une grande importance dans l'étude de l'électricité, et qui paraît lié au mode de propagation des ondes lumineuses.

272. *Rapport des unités de quantité.* — Les dimensions de l'unité de quantité dans le système électrostatique étant

$$Q_e = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T},$$

une quantité d'électricité donnée, A, est représentée dans ce système par un nombre

$$q = \frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{t}$$

l, m et t étant des multiples des unités L, M et T de longueur, de masse et de temps.

Dans le système électromagnétique les dimensions de l'unité de quantité Q_m sont $L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$, et la même grandeur A est représentée par un nombre

$$Q = l_1^{\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}},$$

l_1 et m_1 étant encore des multiples des unités L et M, qui sont en général différents des nombres l et m.

Le rapport $\frac{q}{Q}$ des deux nombres qui représentent la même quantité d'électricité, A, est :

$$\frac{q}{Q} = \frac{l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}}}{t l_1^{\frac{1}{2}} m_1^{\frac{1}{2}}} = \frac{l}{t} \times \left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{m}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Le rapport $\frac{l}{l_1}$ de deux longueurs est un nombre abstrait, indépendant des unités adoptées pour les mesurer; il en est de même du rapport de deux masses $\frac{m}{m_1}$. On peut donc représenter le produit $\left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}}$ par un nombre abstrait, a. Le rapport $\frac{q}{Q}$ devient alors :

$$\frac{q}{Q}=\frac{al}{t}.$$

Ce rapport, qui est évidemment constant, quelle que soit la grandeur de la qnantité mesurée, A, est représenté comme une vitesse, par le rapport d'une longueur al à un intervalle de temps t; si on désigne par v la valeur de ce rapport, on a :

$$\frac{q}{Q}=v \quad \text{ou} \quad q=vQ.$$

273. Q_e et Q_m étant les grandeurs des deux unités absolues, électrostatique et électromagnétique, de quantité, les nombres q et Q, qui représentent la grandeur A ont pour valeur

$$q=\frac{A}{Q_e} \quad \text{et} \quad Q=\frac{A}{Q_m},$$

et par suite on a entre les deux unités la relation

$$\frac{Q_m}{Q_e}=\frac{q}{Q}=v$$

ou

$$Q_m=vQ_e.$$

La grandeur de l'unité électromagnétique d'intensité est donc égale à la grandeur de l'unité électrostatique multipliée par la vitesse v.

274. Le nombre qui représente la vitesse v dépend

des unités adoptées, mais, quelles que soient ces unités, la grandeur de cette vitesse est constante.

Si en effet, on adoptait pour la mesure des longueurs, des masses et des temps des unités p, r et s fois plus petites, les valeurs de q et de Q deviendraient

$$q_1 = \frac{(pl)^{\frac{3}{2}}(rm)^{\frac{1}{2}}}{(st)},$$

$$Q_1 = (pl_1)^{\frac{1}{2}}(rm_1)^{\frac{1}{2}},$$

et on aurait pour le rapport $\frac{q_1}{Q_1}$:

$$\frac{q_1}{Q_1} = \frac{pl}{st}\left(\frac{l}{l_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{m_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{apl}{st},$$

a ayant la même valeur que précédemment. Or, la vitesse représentée dans le nouveau système d'unités par $v' = \frac{apl}{st}$ est la même que la vitesse $v = \frac{al}{t}$ qui correspond au premier système d'unités.

275. *Rapport des unités d'intensité.* — Pour avoir le rapport des nombres qui représentent les intensités i et I, dans les deux systèmes, on peut suivre la même marche que pour la comparaison des quantités d'électricité; mais on peut déduire directement ce rapport des équations $q = it$ et $Q = It$ qui expriment les quantités d'électricité q et Q, mesurées en unités électrostatiques et en unités électrodynamiques en fonction des intensités i et I et du temps t pendant lequel passe le courant.

On déduit en effet de ces deux équations

$$\frac{i}{I} = \frac{q}{Q} = v \quad \text{ou} \quad i = vI.$$

Quant aux deux unités d'intensité dans les deux sys-

tèmes I_s et I_m, elles sont liées entre elles par la relation

$$\frac{I_m}{I_s} = v \quad \text{ou} \quad I_m = vI_s ;$$

puisqu'une intensité donnée est égale dans le système électrostatique au produit $i \times I_s$ et dans le système électromagnétique au produit $I \times I_m$, ce qui conduit à

$$iI_s = II_m$$

ou

$$\frac{I_m}{I_s} = \frac{i}{I} = v.$$

276. *Rapport des unités de force électromotrice.* — Si W représente le travail absolu correspondant à la chaleur dégagée par un courant pendant un intervalle de temps t, dans un conducteur dont les extrémités sont maintenues à une différence de potentiel donné, on a, en représentant par E et e les valeurs de cette différence de potentiel, ou de la force électromotrice, dans les deux systèmes, et par I et i les intensités :

$$W = IEt \quad \text{et} \quad W = iet,$$

d'où l'on déduit

$$IE = ie.$$

et par suite

$$\frac{e}{E} = \frac{I}{i} = \frac{1}{v} \quad \text{ou} \quad e = \frac{E}{v}.$$

Le rapport des deux unités de force électromotrice E_m et E_s, inverse du rapport $\frac{E}{e}$, a pour valeur

$$\frac{E_m}{E_s} = \frac{1}{v},$$

d'où

$$E_m = \frac{E_s}{v}.$$

277. *Rapport des unités de résistance.* — Le rapport des résistances r et R se déduit des équations :

$$i = \frac{e}{r},$$

$$I = \frac{E}{R};$$

qui correspondent aux deux systèmes d'unités. Elles conduisent à l'équation :

$$\frac{r}{R} = \frac{eI}{iE}.$$

ou, en remplaçant i par vI et e par $\frac{E}{v}$,

$$\frac{r}{R} = \frac{1}{v^2} \quad \text{ou} \quad r = \frac{R}{v^2}.$$

Entre les unités absolues de résistance R_m et R_s, on a la relation

$$\frac{R_m}{R_s} = \frac{1}{v^2} \quad \text{ou} \quad R_m = \frac{R_s}{v^2}.$$

278. *Rapport des unités de capacité électrostatique.* — La capacité électrostatique s d'un condensateur dont la charge est q et dont la différence de potentiel des armatures est e, est donnée dans le système électrostatique par l'équation :

$$s = \frac{q}{e},$$

dans le système électromagnétique la capacité S du même condensateur est :

$$S = \frac{Q}{E}.$$

De ces deux équations on déduit :

$$\frac{s}{S} = \frac{qE}{eQ},$$

et, en remplaçant q par vQ et e par $\frac{E}{v}$,

$$\frac{s}{S} = v^2 \quad \text{ou} \quad s = v^2 S.$$

On a, entre les deux unités de capacité électrostatique, S_m et S_e, l'équation

$$\frac{S_m}{S_e} = v^2 \quad \text{ou} \quad S_m = v^2 S_e.$$

279. *Tableau comparatif des unités.* — En résumé, les nombres qui représentent les mêmes grandeurs électriques dans les deux systèmes d'unités sont liés entre eux par les relations

$$q = vQ \quad \Big| \quad i = vI \quad \Big| \quad e = \frac{E}{v} \quad \Big| \quad r = \frac{R}{v^2} \quad \Big| \quad s = v^2 S$$

et les rapports des unités électromagnétiques aux unités électro-statiques, sont :

$$\frac{Q_m}{Q_e} = v \quad \Big| \quad \frac{I_m}{I_e} = v \quad \Big| \quad \frac{E_m}{E_e} = \frac{1}{v} \quad \Big| \quad \frac{R_m}{R_e} = \frac{1}{v^2} \quad \Big| \quad \frac{S_m}{S_e} = v^2$$

280. Le rapport des unités électromagnétiques aux unités électrostatiques est une puissance, égale à 1, — 1, 2, ou — 2, d'un quotient d'une longueur par un intervalle de temps, c'est-à-dire d'une vitesse v. On peut se rendre compte par le raisonnement suivant qu'il doit en être ainsi pour le rapport des unités d'intensité et de quantité (*).

Imaginons deux courants rectilignes parallèles, l'un indéfini et l'autre fini, ce dernier étant situé à une distance du premier égale à b et ayant une longueur égale à a; représentons par I et I' les intensités de ces deux courants exprimées dans le système électromagnétique;

(*) Voir le *Traité d'électricité et de magnétisme* de M. Maxwell.

si leur direction est la même ils s'attireront avec une force f qui aura pour valeur absolue (n° 255)

$$f = \frac{2II'a}{b},$$

ou plus simplement

$$f = II',$$

si l'on suppose $b = 2a$.

La quantité d'électricité qui traverse la section du premier conducteur pendant un intervalle de temps t est It, celle qui traverse la section du second pendant le même temps est $I't$.

Représentons par n le nombre des unités électrostatiques qui sont contenues dans une unité électro-magnétique, la quantité It sera représentée dans le système électrostatique par nIt, et la quantité $I't$ par $nI't$.

Les deux quantités d'électricité nIt et $nI't$, peuvent être supposées concentrées sur deux conducteurs de petite dimension situés à une distance r ; elles se repoussent avec une force f_1 qui a pour valeur

$$f_1 = \frac{n^2II't^2}{r^2}.$$

Si l'on prend la distance r telle que les forces attractive et répulsive f et f_1 soient égales on aura :

$$II' = \frac{n^2II't^2}{r^2}$$

d'où

$$n = \frac{r}{t}.$$

Le rapport n de l'unité électromagnétique à l'unité électrostatique d'intensité et de quantité est donc égal, comme vitesse, au rapport d'une longueur à un intervalle de temps.

On verra plus loin que la valeur de ce rapport est d'environ 300.000.000 mètres par seconde. Les

quantités d'électricité transmises pendant une seconde par les deux courants devraient donc être situées à une distance égale à 300.000.000 mètres pour que leur répulsion fût égale à l'attraction électrodynamique qui s'exerce entre les deux conducteurs placés, comme nous l'avons supposé, à une distance double de la longueur du courant fini.

281. *Conception physique de la vitesse v.* — On peut avoir une conception physique de la vitesse v, qui représente le rapport des deux systèmes d'unités, si l'on admet, ce qui paraît hors de doute surtout depuis les expériences récentes de M. Rowland dont nous parlerons plus loin, qu'une masse électrique en se mouvant dans une direction déterminée produit le même effet qu'un courant électrique parcourant un conducteur suivant la même trajectoire.

Imaginons deux plans indéfinis parallèles, uniformément électrisés et soient δ et δ' les densités des deux couches électriques en présence, exprimées en unités électrostatiques. Si les deux électricités sont de même nom, la force répulsive à laquelle est soumise une étendue A de l'un des deux plans sur laquelle est répandue une quantité d'électricité Q, sous l'action du fluide répandu sur l'autre plan, dont la densité est δ, est (nº 70)

$$2\pi Q\delta$$

ou, en remarquant que $Q = A\delta'$,

$$2A\pi\delta\delta'.$$

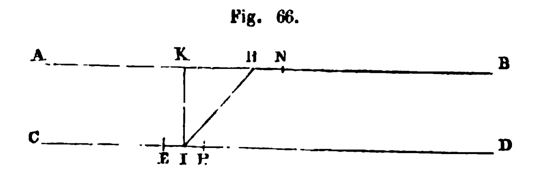
Supposons que ces deux plans se meuvent d'un mouvement uniforme dans des directions parallèles, suivant leurs propres surfaces avec des vitesses u et u', on aura deux courants électriques, dont l'intensité, correspon-

dant à l'unité de largeur, sera $u\delta$ pour le premier et $u'\delta'$ pour le second.

Dans le système électromagnétique ces intensités sont égales à $\frac{u\delta}{v}$ et $\frac{u'\delta'}{v}$.

Pour avoir l'action attractive de ces deux courants concevons un plan normal à la direction du mouvement, qui coupe les deux plans mobiles suivant deux lignes parallèles AB et CD (*fig.* 66), et calculons la force

Fig. 66.



exercée par le premier courant sur un élément rectangulaire du second projeté en EP, de largeur très petite EP $= \alpha$ et de longueur l.

Supposons le premier plan divisé en bandes infiniment étroites, parallèlement à la direction du mouvement et soit HN la projection de l'une de ces bandes de largeur dx, les x étant comptés à partir du point K, pied de la perpendiculaire abaissée du milieu I de EP sur la ligne AB. Le courant indéfini qui correspond à cette bande a pour intensité $\frac{u\delta dx}{v}$; son action sur le courant projeté en EP, dont l'intensité est $\frac{u'\delta'\alpha}{v}$ et la longueur l, produit une force égale à

$$\frac{2uu'\delta\delta'\alpha l \times dx}{v^2 \times \text{IH}},$$

dirigée suivant la ligne IH. La composante de cette force

suivant la normale IK aux deux plans, est

$$\frac{2uu'\delta\delta'\alpha l dx \times \text{IK}}{v^2 \times \overline{\text{IH}}^2},$$

ou, en désignant par a la distance IK des deux plans et remarquant que $\overline{\text{IH}}^2 = x^2 + a^2$,

$$\frac{2uu'\delta\delta'\alpha l}{v^2} \times \frac{adx}{a^2 + x^2}.$$

On aura l'action totale due au mouvement du plan électrisé AB sur la portion αl du second courant, en intégrant cette expression de $x = -\infty$ à $x = +\infty$.

L'intégrale générale de $\frac{adx}{a^2 + x^2}$ est arc tang $\frac{x}{a}$, dont les valeurs correspondantes aux deux limites sont $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$.

L'intégrale définie est donc égale à π, ce qui conduit pour l'action cherchée à la valeur

$$\frac{2\pi uu'\delta\delta'\alpha l}{v^2}.$$

Le produit αl est la surface du plan CD sur laquelle s'exerce l'action du plan AB, et la formule est évidemment la même, quelle que soit la forme et l'étendue de cette surface ; si on la représente par A, on a pour l'expression de la force attractive

$$\frac{2\pi uu'\delta\delta'\text{A}}{v^2}.$$

La force répulsive produite par l'action électrostatique sera donc égale à l'attraction électrodynamique, si l'on a

$$2\,\text{A}\pi\delta\delta' = \frac{2\pi uu'\delta\delta'\text{A}}{v^2},$$

ou si

$$uu' = v^2,$$

c'est-à-dire si les vitesses u et u' des deux plans sont telles que v soit moyenne proportionnelle entre ces deux vitesses. Si u est égal à u', on a $v = u$.

On peut donc dire que la vitesse qui exprime le rapport entre et les unités électromagnétiques et les unités électrostatiques est la vitesse qu'il faudrait imprimer à deux plans parallèles indéfinis, uniformément électrisés, et se mouvant dans la même direction, pour que leur attraction électrodynamique fût égale à la répulsion électrostatique de leurs charges électriques. Ainsi que nous l'avons dit, cette vitesse est d'environ 300.000.000 mètres par seconde.

282. Supposons qu'une surface plane électrisée se meuve dans les conditions indiquées ci-dessus avec une vitesse u, si a est sa largeur et si δ est la densité électrostatique de l'électricité, elle produira le même effet qu'un courant dont l'intensité absolue serait $au\delta$ en unités électrostatiques et $\frac{au\delta}{v}$ en unités électromagnétiques; v ayant une valeur très considérable, ce courant ne peut avoir qu'une intensité extrêmement faible.

On peut augmenter la densité δ en disposant à une petite distance de la plaque mobile une seconde plaque parallèle communiquant avec la terre pendant que la première est en relation avec une machine électrique, de façon à constituer un condensateur dont une des armatures est mobile.

En représentant par d la distance des deux plaques et par V le potentiel que peut produire la machine électrique employée, on a pour la densité δ, ou la charge par unité de surface (n° 82),

$$\delta = \frac{V}{4\pi d}.$$

Si l'on admet pour V le chiffre de 30 unités électro-statiques, que donnent les bonnes machines électriques ordinaires, et pour la distance *d* celui de $0^m,01$ on trouve pour δ environ 250 et pour l'intensité du courant produit :

$$\frac{250\,au}{v}.$$

Supposons, par exemple, que la largeur *a* de la bande soit égale à $0^m,1$ et remplaçons *v* par 300.000.000, on arrive pour l'intensité absolue du courant, en unités électro-magnétiques, à la valeur

$$\frac{25\,u}{300.000.000} = \frac{u}{12.000.000}.$$

283. La vitesse *u* qu'on peut imprimer à une plaque mobile est forcément limitée et relativement très faible par rapport à celle qui figure au dénominateur de la formule précédente, aussi le courant qui peut être ainsi produit est-il très peu intense, et d'autant plus difficile à observer qu'on ne peut multiplier son action sur un aimant.

La force électromotrice d'un élément Daniell en unités absolues (mètre, seconde, masse du gramme) est égale à 107.000; le Ohm est égal à 10.000.000 unités absolues de résistance; la vitesse *u* avec laquelle il faudrait faire mouvoir la bande électrisée, dans les conditions que nous avons admises ci-dessus, pour obtenir un courant de même intensité que celui que produirait un élément Daniell sur un circuit égal à *n* Ohms, est donc donnée par l'équation

$$\frac{u}{12.000.000} = \frac{107.000}{n \times 10.000.000}$$

ou environ

$$u = \frac{128.400}{n} \text{ mètres par seconde.}$$

si n est égal à 1.000 (100 kilomètres de fil de fer de 4 millimètres),

$$u = 128^{m},4 \text{ par seconde.}$$

284. M. Helmholtz qui a cherché à réaliser l'expérience n'a obtenu qu'un résultat négatif, mais M. Rowland a pu obtenir une petite action sur une aiguille aimantée (*) en faisant tourner autour d'un axe vertical un plateau d'ébonite dont la surface était électrisée. Ce plateau de 21 centimètres de diamètre et de 5 millimètres d'épaisseur, doré sur ses deux faces sauf autour de l'axe de rotation, tournait avec une vitesse de 61 tours par seconde; il était placé entre deux disques de verre fixes percés pour laisser passer l'axe et dont la face tournée vers le plateau d'ébonite était dorée. La dorure de ces deux plateaux était en communication avec la terre tandis que celle du plateau central était électrisée au moyen d'une puissante machine électrique par l'intermédiaire d'une pointe fixe distante de 1/2 millimètre de la dorure. Le disque mobile agissait sur un système astatique d'aiguilles aimantées renfermées dans une boîte de laiton placé au-dessus du disque de verre supérieur.

Lorsque le plateau central tournait, on constatait une légère déviation des aiguilles, dont le sens dépendait de la nature de la charge et qui par conséquent ne pouvait être attribuée à l'induction produite par le magnétisme terrestre. Le même effet s'observait lorsque la dorure était enlevée suivant les lignes radiales ou lorsque le plateau d'ébonite était remplacé par un plateau de verre qu'on électrisait au moyen de plusieurs pointes en relation avec la source électrique.

(*) *Journal de physique*, Janvier 1877.

Détermination du rapport des unités électromagnétiques aux unités électrostatiques.

285. Pour déterminer le rapport qui existe entre les unités électromagnétiques et les unités électrostatiques il suffit de chercher la valeur absolue d'une même grandeur électrique dans les deux systèmes d'unités; le rapport cherché se déduit du quotient des deux nombres trouvés, et est, ainsi qu'on l'a vu plus haut, exprimé comme une vitesse par le rapport d'une longueur à un espace de temps.

On peut effectuer cette détermination par plusieurs méthodes :

286. 1° *Par une double mesure de la quantité.* — On peut exprimer numériquement, dans le système électrostatique, la charge q d'un condensateur lorsqu'on connaît sa capacité électrostatique s et la différence de potentiel e des deux armatures ; on a en effet $q = es$.

La capacité absolue s d'un condensateur s'obtient en unités absolues par comparaison avec un condensateur sphérique ou un condensateur étalon (n° 75). Quant à la différence de potentiel des deux armatures, elle peut se mesurer au moyen d'un électromètre préalablement gradué ou d'un électromètre absolu (n° 71).

D'un autre côté la valeur de cette charge dans le système électromagnétique peut se déterminer en opérant la décharge à travers le fil d'un galvanométre gradué en unités absolues ou en appliquant une des formules du numéro 261. Des deux valeurs q et Q on déduit la valeur de v :

$$v = \frac{q}{Q}$$

MM. Weber et Kohlrausch qui ont appliqué cette méthode sont arrivés au chiffre

$$v = 310.740.000 \text{ mètres par seconde.}$$

que nous avons admis au n° 145; mais ce nombre paraît un peu trop élevé, ce qui tient probablement à ce que les diélectriques solides absorbent toujours un peu d'électricité, quelle que courte que soit la durée de la communication avec la source électrique.

Avant MM. Weber et Kohlrausch, MM. Faraday en 1820, Becquerel en 1846 et Buff en 1853 (n° 145) avaient mesuré la charge électrostatique qui peut produire la décomposition d'un poids donné d'eau; mais les conditions dans lesquelles ces expériences ont été faites n'étaient pas suffisamment définies pour qu'on en pût déduire le rapport des unités électrostatiques et électromagnétiques.

287. 2° *Par une double mesure de l'intensité.* — En chargeant un condensateur à l'aide d'une pile électrique. puis le déchargeant à travers le fil d'un galvanomètre et en répétant l'opération à de très courts intervalles, ce qu'on peut réaliser au moyen d'une roue interruptrice, on obtient dans le conducteur un courant sensiblement régulier et constant dont la déviation de l'aiguille peut donner la mesure en unités électromagnétiques, et dont l'intensité en unités électrostatiques est égale au produit de la charge du condensateur par le nombre de fois qu'il est mis en communication avec la source électrique pendant une seconde. La charge du condensateur, qui est égale au produit de sa capacité par la force électromotrice de la source électrique employée, peut d'ailleurs se déterminer directement. Le rapport des intensités $\frac{i}{I}$ est égal à v.

288. 3° *Par une double mesure de la force électromotrice.* — Concevons deux points en relation d'un côté avec une force électromotrice, et de l'autre avec un con ducteur offrant une grande résistance. La force électromotrice, ou différence de potentiel, entre ces deux points peut se mesurer en unités électrostatiques en les mettant en relation avec le plateau d'un électromètre absolu ou d'un électromètre gradué. D'un autre côté, la valeur en unités électromagnétiques de cette même force électromotrice peut se déduire de l'intensité du courant, mesurée par un galvanomètre ou un électrodynamomètre, et de la résistance du conducteur compris entre les deux points, qui peut être déterminée en unités absolues par comparaison avec un étalon de l'Association britannique.

Si E est la force électromotrice, R la résistance, comprenant celle du galvanomètre ou de l'électrodynamomètre, s'ils se trouvent placés dans le circuit entre les deux points considérés (*), on a

$$I = \frac{E}{R} \quad \text{ou} \quad E = RI.$$

En représentant par e la différence des potentiels, exprimée en unités électrostatiques, on est donc conduit à l'équation :

$$\frac{e}{E} = \frac{e}{Ri} = \frac{1}{v} \quad \text{ou} \quad v = \frac{Ri}{e}.$$

289. L'expérience a été faite d'après ce principe en 1867 par sir William Thomson qui a trouvé pour la valeur du rapport v des nombres variant de 275.400.000 à 292.000.000 mètres par seconde, dont la moyenne est :

$$v = 282.500.000 \text{ mètres par seconde.}$$

(*) S'ils sont situés entre un des deux points et la pile, on n'a pas à en tenir compte.

290. Dans l'expérience de sir W. Thomson on mesurait séparément la différence des potentiels et la force électromotrice; M. Clerk Maxwell a employé une méthode un peu différente qui consiste à déterminer simultanément ces deux grandeurs ou plutôt leur rapport, qui entre seul dans la formule.

Deux disques parallèles sont en communication avec les pôles d'une pile composée d'un grand nombre d'éléments dont le circuit est fermé par un conducteur dont la résistance, très grande d'ailleurs, est connue en unités absolues. Un galvonomètre placé dans le circuit donne l'intensité de ce courant et permet d'en déduire le potentiel correspondant aux deux disques, dont l'un est suspendu au bras d'une balance de torsion tandis que l'autre est fixé à l'extrémité d'une vis micrométrique.

A ces deux disques sont fixées deux bobines parcourues en sens opposé par le courant d'une pile formée de peu d'éléments, différente de la première, qui produit une répulsion.

On a ainsi deux actions contraires, inégales en général, qui tendent à faire mouvoir le disque suspendu au fléau de la balance; mais en avançant ou reculant l'autre disque on peut rendre les deux actions égales et ramener le premier dans sa situation normale.

De l'éloignement des disques, de leur étendue, du diamètre et de la résistance des bobines électromagnétiques qui leur sont fixées et enfin du rapport des forces électromotrices des piles on déduit le rapport v.

M. Maxwell est arrivé pour la valeur de v au chiffre 288.000.000 mètres par seconde qui diffère peu de celui trouvé par M. Thomson.

291. 4° *Par une double mesure de la résistance.* — La résistance électrique, r, d'un corps peu conducteur tel

qu'un fil de soie peut se mesurer en unités électrostatiques par la vitesse avec laquelle s'opère à travers ce fil la décharge d'un corps conducteur ou d'un condensateur électrisé (n° 122).

La résistance du même fil en unités électromagnétiques, R, se mesure à l'aide d'une pile, d'un galvanomètre et de conducteurs étalonnés en unités absolues.

Des deux valeurs, r et R, de la même résistance on déduit la valeur de v en appliquant la formule $r = \frac{R}{v^2}$ ou

$$v = \sqrt{\frac{R}{r}}.$$

292. 5° *Par une double mesure de la capacité électrostatique.* — La capacité électrostatique d'un condensateur est directement connue en unités électrostatiques absolues lorsqu'il est sphérique; elle a pour valeur $s = \frac{Rr}{R - r}$ (n° 55), R et r étant les rayons des deux sphères qui forment le condensateur. Si le condensateur est formé de deux surfaces planes parallèles suffisamment étendues, sa capacité est $s = \frac{A}{4\pi d}$ (n° 59), A étant l'étendue des surfaces en présence et d leur distance.

Dans le système électromagnétique on peut déterminer cette capacité par l'expérience en mettant les deux armatures en communication avec deux points maintenus par une pile à une différence de potentiel connue, E, puis en opérant la décharge et en prenant sa mesure électromagnétique, Q, à l'aide d'un galvanomètre. La capacité S est égale au rapport $\frac{Q}{E}$ de la charge à la différence des potentiels.

Des deux valeurs s et S de la même capacité électrostatique on déduit le rapport ou la vitesse v par la rela-

tion $s = v^2 S$ (n° 277) qui donne

$$v = \sqrt{\frac{s}{S}}.$$

293. Pour avoir deux points maintenus à une différence de potentiel constante et connue en unités électromagnétiques, il suffit de mettre ces deux points en relation d'une part avec les pôles d'une pile électrique et de l'autre avec les deux extrémités d'un conducteur dont la résistance soit déterminée en unités absolues, et de mesurer avec un galvanomètre l'intensité du courant. Si I est l'intensité, R la résistance intercalée entre les deux points et E leur différence de potentiel, on a en effet $E = RI$.

Supposons par exemple que φ soit la déviation de l'aiguille du galvanomètre, on aura :

$$I = \frac{h}{N} \operatorname{tang} \varphi,$$

h étant la composante horizontale du magnétisme terrestre et N la constante de l'instrument. Cette intensité peut d'ailleurs se mesurer, si l'intensité est trop considérable, en plaçant un fil de dérivation entre les deux bornes du galvanomètre (Shunt) (n° 200).

La valeur de la différence de potentiel entre les deux points considérés est donc :

$$E = IR = \frac{Rh}{N} \operatorname{tang} \varphi.$$

Si l'on met ces deux points en communication avec un condensateur dont la capacité électrostatique soit égale à S, la charge Q qu'il prendra aura pour valeur $Q = ES$. La capacité électromagnétique inconnue S se déduit de la charge Q, qu'on peut mesurer en lui faisant traverser le fil d'un galvanomètre.

Si l'instrument employé pour cette mesure est le

même qui servait à mesurer E, la constante N est la même, et l'on a (n° 261)

$$Q = ES = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times th}{N\pi}$$

de ces deux équations on tire la valeur de S en unités électrodynamiques absolues

$$S = \frac{2t}{\pi R} \times \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha}{\tang \varphi}.$$

294. MM. Ayrton et John Perry ont déterminé en 1878 le rapport des unités électromagnétiques et électrostatiques par cette méthode, en employant un condensateur absolu à surfaces planes (n° 75) formé de deux plaques dont l'une était entourée d'un anneau de garde.

L'étendue de ces plaques était de 1.324 centimètres carrés; la pile se composait de 282 éléments Daniell et la résistance intercalée entre les deux pôles de la pile était de 12.000 Ohms, ou de 12.000×10^7 unités absolues de résistance $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$.

De la moyenne de leurs expériences ils ont déduit pour la valeur de v : 298.000.000 mètres par seconde, chiffre un peu supérieur à ceux qui ont été trouvés par MM. Thomson et Maxwell (*).

295. *Comparaison des chiffres trouvés pour v.* — Les divers nombres trouvés pour la valeur de v sont donc, en mètres par seconde :

Par MM. Weber et Kohlrausch.	310.740.000
MM. Ayrton et Perry.	298.000.000
M. Maxwell.	288.000.000
M. William Thomson.	282.000.000

D'un autre côté, les nombres trouvés par diverses méthodes pour la vitesse de la lumière sont, en mètres par seconde :

(*) *Journal of the society of telegraph Engineers*, 1879.

Expériences de M. Fizeau.	148.000.000
Méthodes astronomiques.	308.000.000
Expériences de M. Cornu.	300.000.000
— de M. Foucault.	298.000.000

La vitesse de la lumière et le rapport des unités électromagnétiques aux unités électrostatiques sont donc des grandeurs de même ordre et qui se rapprochent assez pour qu'on puisse admettre qu'ils sont identiques et ont une origine commune.

Tableau des dimensions des principales grandeurs électromagnétiques.

296. Nous résumons dans le tableau suivant les dimensions des principales grandeurs mécaniques, magnétiques et électriques que nous avons passées en revue :

Unités fondamentales.

Longueur L, Masse M, Temps T.

Unités mécaniques dérivées.

Vitesse, V.	$\frac{L}{T}$
Force, F.	$\frac{LM}{T^2}$
Travail, force vive ou énergie, W.	$\frac{L^2M}{T^2}$

Unités magnétiques.

Force d'un pôle magnétique, N.	$\frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$
Intensité d'un champ magnétique, H.	$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{1}{2}}T}$
Potentiel magnétique, U.	$\frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$
Moment magnétique d'un aimant, O.	$\frac{L^{\frac{5}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$

Unités électriques.

	Système électro-statique.	Système électro-magnétique.
Quantité électrique, Q.	$\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$	$L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}$
ntensité d'un courant, I.	$\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$	$\frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$
Force électromotrice ou potentiel, E.	$\frac{L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T}$	$\frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2}$
Résistance, R.	$\frac{T}{L}$	$\frac{L}{T}$
Capacité électrostatique d'un condensateur, S. .	L	$\frac{T^2}{L}$
Densité électrique à la surface d'un corps.	$\frac{M^{\frac{5}{2}}}{L^{\frac{1}{2}} T}$	$\frac{M^{\frac{1}{2}}}{L^{\frac{3}{2}}}$
Résistance spécifique.	T	$\frac{L^2}{T}$
Conductibilité d'un conducteur.	$\frac{L}{T}$	$\frac{T}{L}$
Conductibilité spécifique.	$\frac{1}{T}$	$\frac{T}{L^2}$

CHAPITRE XII.

UNITÉS DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE ET MESURE DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES.

297. Les grandeurs électriques peuvent être mesurées en unités absolues, soit dans le système électrostatique, soit dans le système électro-magnétique.

Le premier système d'unités est ordinairement adopté pour l'étude des phénomènes électrostatiques. Pour celle des courants électriques, on fait usage, en raison de leurs relations intimes avec le magnétisme, des unités électro-magnétiques ; mais comme la grandeur de ces unités, fondées sur le mètre, la seconde et la masse du gramme, n'est pas en rapport avec les quantités qu'on a à envisager en général dans l'étude des phénomènes électriques et en particulier dans celle de la télégraphie électrique, on a adopté pour unités pratiques des cinq grandeurs principales, l'intensité, la quantité d'électricité, la force électro-motrice, la résistance et la capacité électrostatique, les unités élémentaires multipliées par une puissance de 10 choisie convenablement. Ces coefficients ne sont pas indépendants les uns des autres ; il y avait intérêt, en effet, à conserver les deux relations fondamentales $I = \frac{E}{R}$ et $Q = SE$; il était également utile de laisser

subsister l'équation $I = Qt$, qui donne l'intensité en fonction de la quantité d'électricité en mouvement et du temps, en maintenant à t sa signification d'un certain nombre de secondes. Le nombre des coefficients arbitraires à choisir s'est ainsi trouvé réduit à deux.

On a pris pour unité de résistance l'unité électromagnétique absolue $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ multipliée par 10^7, et pour unitée de force électro-motrice l'unité absolue multipliée par 10^5, qui représentent l'une et l'autre des grandeurs de même ordre que celles qu'on a à étudier habituellement ; leur usage évite l'emploi de coefficients composés d'un grand nombre de chiffres.

Les dimensions des unités électro-magnétiques absolues de résistance et de force électro-motrice étant

$$R_m = \frac{L}{T}$$

et

$$E_m = \frac{L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}}{T^2},$$

l'adoption des unités pratiques $10^7\,R_m$ et $10^5\,E_m$ revient à prendre pour unité de longueur le mètre, L, multiplié par 10^7, et pour unité de masse celle du gramme, M, divisée par 10^{11}, l'unité de temps, T, restant la seconde.

On a en effet :

$$10^7 R_m = \frac{(10^7 L)}{T}$$

et

$$10^5 E_m = \frac{(10^7\,L)^{\frac{3}{2}} \times (10^{-11}\,M)^{\frac{1}{2}}}{T^2}.$$

En adoptant ces coefficients pour les unités de longueur

et de masse, l'unité de force devient

$$F_1 = \frac{(10^7 L)(10^{-11} M)}{T^2} = 10^{-4} \frac{LM}{T^2} = 10^{-4} F,$$

ou l'unité absolue de force (mètre, seconde masse du gramme) divisée par 10^4, et l'unité de travail

$$W_1 = \frac{(10^7 L)^2 (10^{-11} M)}{T^2} = 10^3 \frac{L^2 M}{T^2} = 10^3 W,$$

ou 1.000 fois l'unité absolue de travail.

Nous allons passer en revue les diverses unités de l'association britannique et rappeler les principaux moyens de mesurer les grandeurs électriques en fonction de ces unités.

Unité de résistance.

298. Ainsi qu'il vient d'être dit, l'unité adoptée pour la mesure des résistances est égale à l'unité absolue $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ mutipliée par 10^7; elle se représente par le rapport $\frac{10^7 \text{ mètre}}{\text{seconde}}$ ou

$$\frac{\text{le quart du méridien terrestre}}{\text{une seconde}}.$$

La grandeur de cette unité, déterminée d'abord par Weber, a été arrêtée en 1864, d'après la moyenne des résultats obtenus en 1863 et 1864 par la sous-commission de l'association britannique chargée de faire les expériences et de fixer matériellement l'étalon.

Il a été convenu (n° 13) que cet étalon ne serait pas

donné comme représentant l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètres}}{\text{seconde}}$, mais qu'il serait désigné par un symbole spécial, *unité* BA *de l'association britannique*, afin de lui assurer une existence propre et de ne pas entraîner de confusion dans le cas où l'on arriverait à une approximation plus grande pour la véritable valeur de l'unité absolue.

On a donné à l'unité BA le nom d'*ohm* ou d'*ohmade*, et, afin d'éviter l'emploi de chiffres trop considérables, on a adopté pour la mesure des grandes résistances un multiple de l'ohm égal à un million d'ohms (1,000,000 ohms) qu'on a nommé *meghom;* pour celle des résistances très faibles, on a pris un sous-multiple égal à un millionnième d'ohm (0,000,001 ohm) qu'on a appelé *microhm.*

On représente souvent l'ohm par la lettre grecque minuscule ω et le meghom par la lettre grecque majuscule Ω.

299. *Étalons de résistance.* — Le comité de l'association britannique a construit, ainsi que nous l'avons dit dans le premier chapitre (n° 14), dix étalons types formés de diverses substances, qui à la température de 14°,5 à 16°,5 centigrades représentent exactement la résistance d'un ohm, et servent à établir les copies qu'on livre au public.

Deux de ces étalons sont en mercure ; les huit autres sont formés de fils métalliques de diverses substances, de 1 mètre à 2 mètres de longueur, enroulés entre deux cylindres et noyés dans la paraffine, la *fig.* 67 montre la section de ces étalons en demi-grandeur ; l'élévation et le plan sont représentés dans les *fig.* 68 et 69 au quart de grandeur.

Le fil fin qui donne l'unité est noyé dans la paraffine

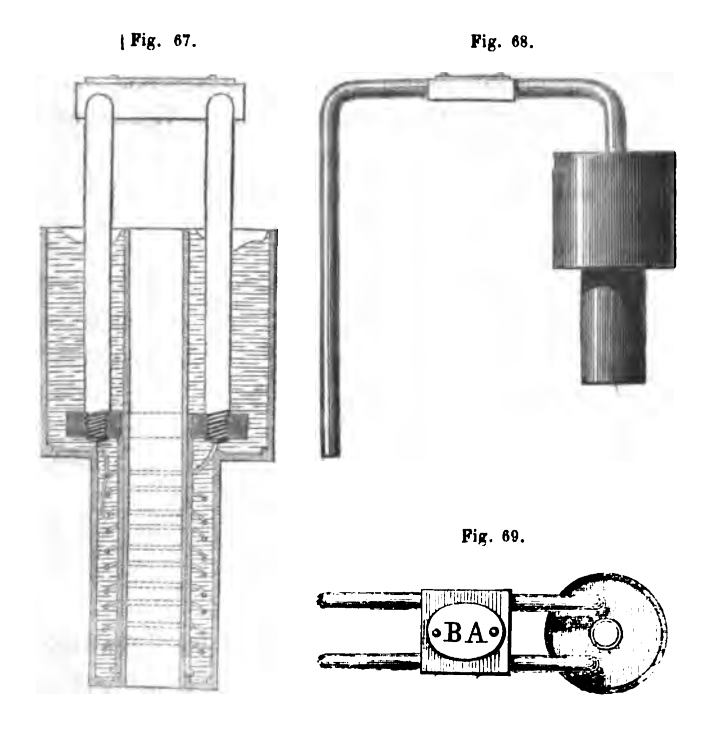


Fig. 67. Fig. 68. Fig. 69.

et soudé à deux tiges métalliques épaisses. Lorsqu'on veut faire usage d'un de ces étalons on plonge les extrémités des deux tiges dans deux godets remplis de mercure, auxquels on fait aboutir les fils de communication et l'on place le cylindre qui contient le fil dans un vase plein d'eau, qu'on maintient à une température constante d'environ 15° centigrades.

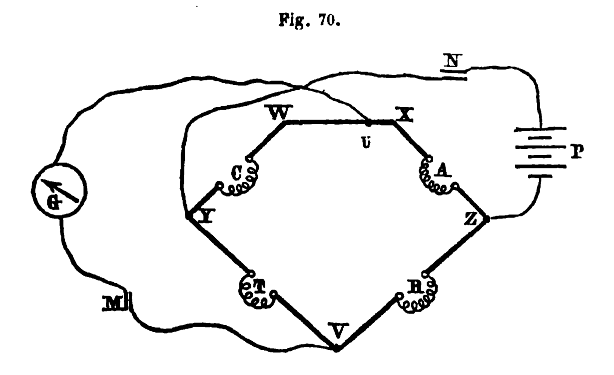
300. *Copies des étalons.* — Pour les copies qu'on livre au public on se sert d'un alliage platine-argent étiré en fil fin de $1^{m},50$ à 2 mètres et qu'on dispose ordinairement comme les fils étalon entre deux cylindres

concentriques, de façon à pouvoir les placer dans de l'eau maintenue à une température uniforme de 14 à 15° centigrades.

Pour établir ces copies avec une exactitude aussi grande que possible, on emploie un pont de Wheatstone modifié par M. Fleeming Jenkin.

Trois sommets du pont Y, V et Z (*fig.* 70) sont fixes,

Fig. 70.

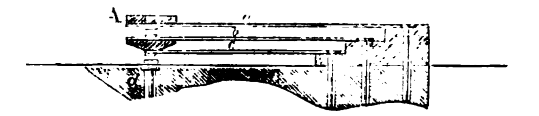


le quatrième U, est mobile; il est formé par un curseur auquel on attache le fil de communication, et qui peut se mouvoir le long d'une tige graduée d'un petit diamètre, WX; P est la pile dont les deux pôles communiquent avec les deux sommets Y et Z, et G un galvanomètre sensible, communiquant avec les deux autres sommets U et V. On ferme le circuit à l'aide de deux manipulateurs M et N, qu'on fait mouvoir simultanément en appuyant sur une seule poignée; mais le circuit de la pile est fermé par le manipulateur N un instant avant que la communication soit établie avec le galvanomètre par le manipulateur M, afin d'empêcher les courants induits qui peuvent se produire d'agir sur l'aiguille aimantée.

Ce manipulateur (*fig.* 71) se compose de trois lames

a, *b*, *c*, isolées les unes des autres, et qu'on manœuvre


Fig. 71.



en appuyant sur une poignée en ébonite A. On met ainsi en communication successivement : d'abord les deux lames *a* et *b* qui sont reliées à la pile et représentent le manipulateur N de la figure 70, puis la lame *c* et l'enclume *d*, qui correspondent au manipulateur M et ferment le circuit du galvanomètre.

301. On installe en A et C (*fig.* 70) des résistances aussi égales que possible, en R un étalon de l'association britannique et en T le fil conducteur dont on veut fixer une longueur offrant la même résistance que l'étalon R.

M. Jenkin comparant cet instrument à une balance ordinaire nomme les bobines A et C les bras de la balance, et les bobines R et T les poids (*).

Le fil WX permet de modifier les bras de la balance qui ne sont plus A et C, mais A + XU et B + WU.

Quant aux conducteurs métalliques qui établissent les communications entre les sommets et les bobines, ce sont des plaques métalliques épaisses dont la résistance est négligeable, et, pour éviter les défauts de conductibilité qui pourraient se produire aux points de jonction des fils et des lames du pont, la communication avec ces lames s'établit au moyen de petits godets remplis de mercure

(*) Le nom de balance paraît en effet plus rationnel que celui de pont ou de parallélogramme qu'on donne ordinairement à l'appareil de Wheatstone.

dans lesquels on fait plonger les extrémités des fils de communication.

302. La bobine que l'on veut étalonner ayant déjà à peu près une longueur convenable est placée en T; on ferme les circuits à l'aide des manipulateurs M et N et l'on fait mouvoir s'il est nécessaire, le curseur U sur la tige WX de façon qu'aucun courant ne traverse le galvanomètre. La bobine T doit donc être préalablement ajustée de façon à ce que cette condition puisse être remplie en faisant mouvoir le curseur entre ces deux limites W et X, condition facile à réaliser si l'on prend d'abord pour A et C des bobines peu résistantes. Dans cette situation on a :

$$\frac{T}{R} = \frac{C + WU}{A + XU}.$$

On fait alors permuter les bobines R et T, opération qui se fait par la simple manœuvre d'un levier qui change de place les communications avec les coupes de mercure, et l'on ferme de nouveau les circuits. Si l'équilibre électrique subsiste au galvanomètre, les résistances T et R sont identiques. Mais il n'en est pas ainsi en général, et il est ordinairement nécessaire de déplacer le curseur U pour rétablir l'équilibre. S'il doit être amené du côté W, on en conclut que la résistance T est plus grande que celle de l'étalon R.

Si x est la résistance de la portion du fil W X, compris entre les deux positions du curseur, l'approximation obtenue pour T, $\frac{T - R}{R}$, est sensiblement égale à $\frac{x}{A}$.

En effet, si a et c représentent les résistances des fils XU et WU dans le premier cas, elles deviennent $a + x$ et $c - x$ dans le second et l'on a donc les deux rela-

tions :

$$\frac{T}{R} = \frac{C + c}{A + a},$$

$$\frac{T}{R} = \frac{A + a + x}{C + c - x}.$$

De ces deux équations on déduit, en représentant par u le rapport $\frac{T - R}{R}$:

$$u^2(A + a) + 2u(A + a) + 2x + ux = 0.$$

u, a et x étant très petits, on peut négliger les termes qui contiennent ces grandeurs au second degré, ce qui conduit à l'équation $u = \frac{x}{A}$.

On modifie par tâtonnements la longueur du fil de la bobine à ajuster, T, de façon que le rapport $\frac{x}{A}$ soit aussi petit que possible.

303. Pour opérer on prend d'abord pour A et C des bobines peu résistantes de façon à rendre facile l'approximation $\frac{x}{A}$, puis on les remplace par d'autres offrant une résistance plus considérable.

On commence par prendre deux bobines formées d'un fil de même nature que celui qui constitue la communication WX, et ayant, par exemple, 10 mètres de longueur, en supposant que celle de WX soit de 10 centimètres.

On arrive facilement à modifier le conducteur à étalonner, T, de façon à n'avoir à déplacer le curseur U que d'environ un centimètre pour rétablir l'équilibre lorsqu'on intervertit les bobines T et R; l'erreur commise en regardant T comme égal à R et alors d'environ $\frac{0.01}{10}$ ou 0.001.

Pour accroître l'approximation on remplace les bobines A et C par d'autres, A' et C', 10 fois plus résistantes. Il faut alors déplacer le curseur d'une quantité 10 fois plus grande, ou de 10 centimètres au plus, pour maintenir au repos l'aiguille du galvanomètre lorsqu'on fait permuter T et R. Mais, en modifiant encore par tâtonnement la longueur de la bobine T, on peut faire en sorte que l'écart des positions qui correspondent à l'équilibre ne dépasse pas un centimètre. Lorsque cette condition est remplie de nouveau, la bobine T offre la même résistance que la bobine R avec une approximation de 0.0001.

On peut de nouveau remplacer les bobines A' et C' par d'autres 10 fois plus résistantes, et, en répétant ainsi l'opération plusieurs fois, on obtient un conducteur T qui représente l'étalon R avec une approximation aussi grande que les moyens matériels peuvent le permettre.

304. La *fig.* 72 montre la projection horizontale du pont de Wheatstone modifié pour former les copies de l'étalon de résistance.

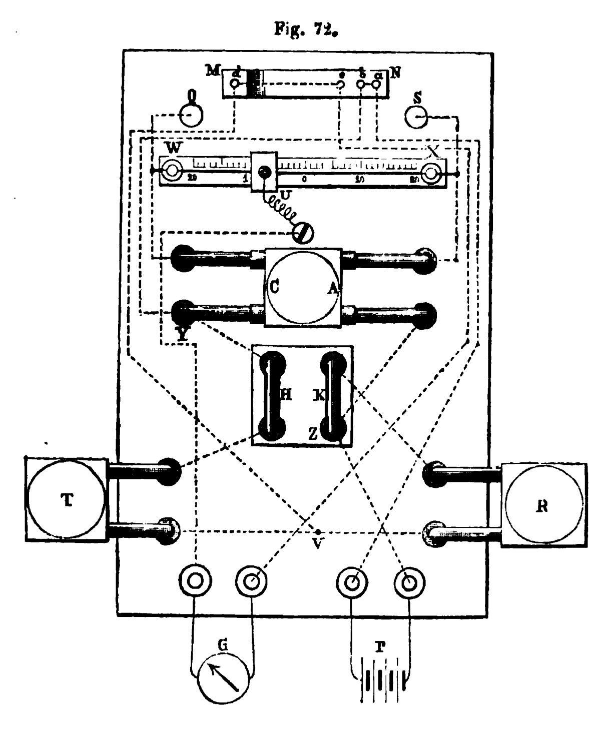
U, Y, Z et V sont les quatre sommets du pont, P et G la pile et le galvanomètre, qui sont séparés de l'instrument; CA est une bobine sur laquelle sont enroulés les deux fils isolés aussi égaux que possible, qui constituent les bras de la balance électrique, et dont les extrémités aboutissent à quatre tiges qui plongent dans des coupes à mercure. R est l'étalon et T la bobine à étalonner, qui sont mis l'un et l'autre en communication avec les conducteurs fixes du pont au moyen de petites coupes à mercure dans lesquelles plongent leurs extrémités.

WX est le fil gradué sur lequel on fait mouvoir le curseur U, qui permet de remédier à l'inégalité des deux bras A et C, comme il a été indiqué plus haut.

MN est le double manipulateur disposé comme dans

la *fig.* 71 et dont deux contacts *a* et *b* ferment, lorsqu'ils

Fig. 72.



sont réunis, le circuit de la pile, tandis que les deux autres *c* et *d* ferment le circuit du galvanomètre. Enfin H et K sont deux tiges épaisses dont les extrémités plongent dans des coupes à mercure.

Il suffit de suivre les lignes ponctuées qui indiquent les communications, pour se rendre compte que la marche du courant est la même que dans la figure théorique 70.

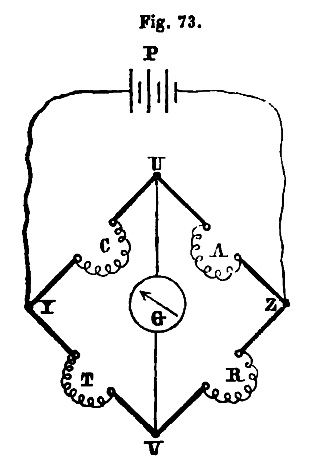
305. En enlevant les deux tiges K et H et les plaçant dans le sens horizontal la communication est intervertie et l'effet est le même que lorsque dans la *fig.* 70 on fait permuter les bobines R et T.

En retournant la pièce qui porte les bobines C et A, on produit le même effet qu'en changeant de place les deux bobines C et A de la *fig.* 70.

Deux coupes à mercure Q et S sont en communication avec les deux extrémités W et X du fil fin ; lorsqu'on les réunit par une tige de laiton épaisse, les points Q, S, W, X et U sont maintenus au même potentiel et l'appareil se trouve dans les conditions d'un pont ordinaire de Wheatstone.

306. *Multiples de l'étalon.* — Les copies de l'étalon obtenues par la méthode précédente, qui sont mises à la disposition des physiciens, peuvent servir à en établir d'autres par un procédé analogue, puis au moyen de ces copies on forme des multiples qui servent eux-mêmes à en former d'autres offrant une résistance quelconque.

Fig. 73.

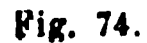


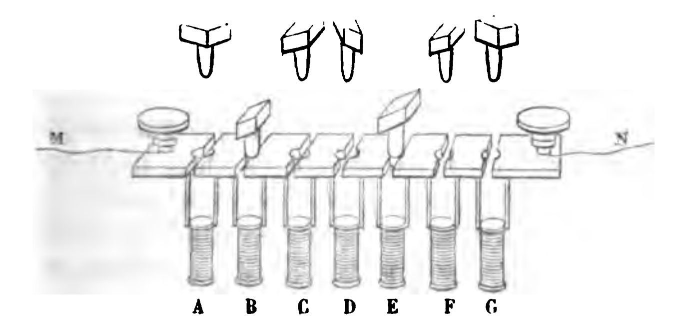
Pour établir ces multiples on se contente ordinairement d'un pont de Wheatstone ordinaire (*fig.* 73). En A et C on place des résistances égales ou ayant un rapport connu, en R l'étalon ou un multiple de l'étalon, et en T la bobine que l'on veut ajuster.

On obtient ainsi des bobines qui, accouplées convenablement, représentent un multiple quelconque de l'unité. La combinaison la plus rationnelle pour un jeu de bobines est celle qui consiste à avoir des multiples croissant en progression géométrique, et représentant 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, etc., ohms ; mais le plus habituellement on adopte des bobines dont la résistance varie

d'une façon plus en rapport avec le système décimal et représentent 1, 2, 3, 5, 10, 20, 30, 50, 100, etc., ohms, ce qui en rend l'emploi plus commode.

Les bobines sont, en général, placées sur un socle en bois et les extrémités de chacune d'elles aboutissent à deux pièces métalliques qu'on réunit par une cheville de cuivre lorsque le fil de la bobine ne doit pas être dans le circuit et qu'on enlève dans le cas contraire, comme dans la *fig.* 74, où les bobines A, C, D, F, G sont seules


Fig. 74.



dans le circuit du fil MN, le courant ne traversant pas les bobines B. et E.

307. On obtient des résistances plus petites que l'unité, soit en prenant une fraction déterminée d'un fil dont la résistance est égale à l'unité, soit par des procédés galvanométriques, en disposant sur le pont de Wheatstone ordinaire (*fig.* 73), en A et en C, des résistances inégales ayant un rapport connu, $\frac{C}{A} = \frac{1}{n}$, plus petit que l'unité, en R une résistance égale à un ohm, et en T le fil à étalonner, dont on prend une longueur telle que l'aiguille du galvanomètre reste au repos quand le courant parcourt les

deux branches ; on a alors $T=\frac{R}{n}$. En faisant varier n on obtient une échelle de résistances aussi complète que l'on veut.

On emploie souvent aussi des rhéostats dans lesquels la résistance varie d'une façon continue et formés, par exemple, d'un fil tendu sur lequel on peut faire mouvoir un curseur métallique. Le courant passe du curseur à l'une des extrémités du fil dont il ne traverse qu'une longueur qui peut être mesurée exactement. La résistance de l'unité de longueur de ce fil étant déterminée, on déduit de la position du curseur la résistance de la portion du fil qui est introduite dans le circuit. On donne d'ailleurs aux rhéostats des formes très diverses.

308. La résistance des bobines que l'on construit ne dépasse pas ordinairement 10.000 ohms. Ces bobines suffisent pour mesurer des résistances aussi grandes que l'on peut avoir à en rencontrer dans la pratique, néanmoins, il peut être utile dans certains cas d'avoir à sa disposition des résistances beaucoup plus considérables sous un volume restreint,.

M. Phillips est arrivé à ce résultat au moyen d'une ligne au crayon marquée sur le verre et dont les extrémités sont disposées de façon à pouvoir être intercalées dans un circuit, le tout étant verni pour être à l'abri des actions atmosphériques.

En faisant varier la largeur et l'épaisseur du trait on obtient ainsi des résistances graduées qui peuvent varier de 25.000 à 100.000.000 ohms.

309. *Comparaison entre l'ohm et les autres unités de résistance.* — On a entre l'ohm et les diverses unités de résistance qui ont été ou sont encore en usage les relations suivantes :

L'unité Siemens, qui correspond à la résistance d'une colonne de mercure de 1 mètre de hauteur et de 1 millimètre carré de section est égale, d'après une détermination faite par M. Siemens à Londres en 1864, à 0,9563 ohms.

L'unité française représentant la résistance d'un kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre, étalon de M. Digney, = 9,266 ohms

La même unité, étalon de M. Bréguet, = 9,760 ohms

La même unité, étalon suisse. = 10.42 ohms.

L'unité Jacobi, égale à 25 pieds d'un fil de cuivre pesant 345 grammes, = 0,6367 ohms.

L'unité Varley, égale à un mile de fil de cuivre de $\frac{1}{16}$ de pouce de diamètre, = 25,61 ohms.

L'unité allemande égale à 8238 yards de fil de fer de $\frac{1}{6}$ de pouce de diamètre = 57,44 ohms.

Réciproquement la résistance qui correspond à un ohm est égale à

1,0456	unité	Siemens
0,1079	—	Digney
0,1024	—	Bréguet
0,0959	—	Suisses
0,5700	—	Jacobi
0,03905	—	Varley
0,01741	—	allemande

Mesure des résistances.

310. ***Mesure des résistances au moyen du galvanomètre.*** — On peut mesurer par diverses méthodes la résistance des conducteurs ordinaires lorsqu'on a à sa disposition

une pile électrique, un galvanomètre et des bobines étalonnées.

Le procédé le plus simple consiste à placer le conducteur dans un circuit et à chercher la déviation du galvanomètre, qu'on maintient dans des limites convenables en faisant varier la force électromotrice; on remplace alors le conducteur par des bobines étalonnées qu'on groupe de façon à obtenir la même déviation, en leur ajoutant, si l'on veut une grande approximation, un rhéostat gradué dont on fait varier d'une façon continue la longueur du fil intercalé dans le circuit.

La résistance ainsi introduite représente celle du conducteur donné, dont la mesure peut se faire avec un galvanomètre quelconque.

311. Lorsqu'on n'a à sa disposition qu'une seule bobine étalonnée mais que le galvanomètre est gradué, on a la résistance cherchée en mesurant l'intensité : 1° lorsque le circuit est fermé directement ; 2° lorsqu'il est fermé par l'intermédiaire du conducteur dont on cherche la résistance ; 3° lorsqu'il est fermé par l'intermédiaire de la bobine étalonnée.

Si E est la force électromotrice de la pile, R la résistance du circuit fixe, y compris celle du galvanomètre, a celle de la bobine, et x celle du conducteur à mesurer on a, en nommant α, β, γ les déviations de l'aiguille de la boussole dans les trois cas, et I_α, I_β et I_γ les intensités correspondantes.

$$I_\alpha = \frac{E}{R}, \quad I_\beta = \frac{E}{R+x}, \quad I_\gamma = \frac{E}{R+a};$$

on en déduit

$$x = \frac{I_\gamma(I_\alpha - I_\beta)}{I_\beta(I_\alpha - I_\gamma)} \times a.$$

Si les déviations α, β et γ sont assez faibles pour pou-

voir être considérées comme proportionnelles aux intensités, la formule devient :

$$x = \frac{\gamma(\alpha - \beta)}{\beta(\alpha - \gamma)} \times a;$$

dans ces deux formules la résistance x est exprimée en unités de même nature que a.

312. La précision qu'on obtient lorsqu'on emploie ces deux méthodes est évidemment d'autant plus grande que la résistance fixe du circuit, R, est plus faible. En outre, une légère variation de l'intensité du courant agit d'autant plus sur l'aiguille que la déviation est moindre, et l'on doit faire en sorte que cette déviation ne dépasse pas 15 et 20 degrés, soit en faisant varier le nombre de tours du fil autour de l'aiguille, soit plus simplement en prenant un nombre convenable d'éléments de la pile.

Pour faire les expériences en divers points sur les lignes électriques, on prend ordinairement des galvanomètres de même forme et dont le nombre de tours soit identique. En France, les galvanomètres employés dans les bureaux télégraphiques pour les expériences sur les lignes aériennes sont des boussoles de sinus qui comportent 12 tours de fil; dans la plupart des pays on se sert de galvanomètres ordinaires ayant 20 ou 30 tours de fil.

313. Les conditions sont différentes lorsqu'on veut mesurer de grandes résistances telles que celle de l'enveloppe isolante d'un câble souterrain ou sous-marin, ou étudier la résistance des corps peu conducteurs.

Il importe alors de disposer le fil du galvanomètre de façon à avoir le maximum de sensibilité. On a vu (n° 207) que ce maximum correspond au cas où le fil enroulé est

terminé par une des surfaces engendrées par l'équation $a^4 y^2 = (x^2 + y^2)^3$, où il offre une résistance égale à celle qu'on veut mesurer et où la section du fil enroulé croît proportionnelle au rayon du cercle qu'il décrit autour de l'aiguille.

Pour qu'un même instrument puisse servir à mesurer des résistances très différentes on enroule souvent sur le cadre deux fils égaux qu'on intercale dans le circuit soit parallèlement, soit à la suite l'un de l'autre. Si r est la résistance de chacun de ces fils, celle du conducteur intercalé dans le circuit est $\frac{1}{2} r$ dans le premier cas et $2r$ dans le second, on adopte celle des deux dispositions qui se rapproche le plus de la condition théorique du maximum.

Le diamètre du fil qu'on peut employer ayant forcément une limite, ainsi que l'espace qu'il doit occuper, la condition de l'égalité entre sa résistance et celle du circuit extérieur ne peut être remplie, même d'une façon approchée, lorsque la résistance à mesurer est très considérable, et l'on donne au galvanomètre des dimensions pratiques en employant des bobines formées d'un fil aussi fin que possible dans la partie la plus voisine de l'aiguille, puis des fils dont le diamètre s'accroît à mesure qu'on s'en éloigne. On a formé des galvanomètres dont le nombre de circonvolutions du fil atteint 20 ou 30.000.

314. Pour mesurer une grande résistance on fait d'abord traverser le fil du galvanomètre par un courant dû à un très petit nombre d'éléments, deux ou trois par exemple, en intercalant dans le circuit une résistance considérable R. Si r est la résistance du galvanomètre, α la déviation, I_α l'intensité du courant, et E, la force électro-

motrice, on a, en négligeant la résistance de la pile :

$$I_\alpha = \frac{E}{R + r}.$$

On enlève alors la résistance R, et on met le galvanomètre en communication avec le conducteur dont on cherche la résistance, x, en remplaçant la pile E par une autre n fois plus forte. Si β est la nouvelle déviation on a :

$$I_\beta = \frac{nE}{x + r}.$$

De ces deux équations, on tire

$$= n(R + r)\frac{I_\alpha}{I_\beta} - r.$$

Les déviations α e β étant ordinairement assez faibles pour qu'on puisse regarder les intensités I_α et I_β comme proportionnelles aux déviations α et β, on a :

$$x = n(R + r)\frac{\alpha}{\beta} - r.$$

On peut enfin négliger, r en général, et poser simplement :

$$x = nR\frac{\alpha}{\beta}.$$

Souvent on remplace la première expérience par une autre, consistant à prendre la pile entière dont la force électromotrice en nE, et à lui faire traverser le fil du galvanomètre en même temps qu'une résistance connue R, mais en réunissant les deux bornes de l'instrument par un fil de dérivation (shunt) pour diminuer l'action du courant sur l'aiguille. Si ρ est la résistance de cette dérivation, une fraction seulement, $\frac{\rho}{r + \rho}$, du courant traverse

le fil enroulé autour de l'aiguille et son intensité est :

$$I_\gamma = \frac{nE\rho}{Rr + R\rho + r\rho}.$$

ou, en négligeant ρ devant R,

$$I_\gamma = \frac{nE}{R} \times \frac{\rho}{r + \rho}.$$

Cette équation, combinée avec

$$I_\beta = \frac{nE}{x + r},$$

donne :

$$x = \frac{I_\gamma}{I_\beta} \times \frac{r + \rho}{\rho} \times R - r,$$

ou plus simplement, en remplaçant I_α et I_γ par les déviations α et γ, et en négligeant r,

$$x = \frac{\gamma}{\beta} \times \frac{r + \rho}{\rho} \times R$$

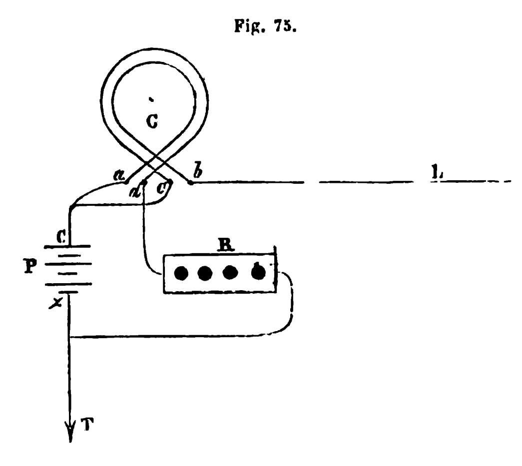
C'est la formule qu'on emploie habituellement pour la mesure des grandes résistances.

315. ***Mesure des résistances à l'aide du galvanomètre différentiel.*** — Le galvanomètre différentiel se compose de deux circuits pareils aboutissant à quatre bornes *a* et *b*, *c* et *d* (*fig.* 75), au centre desquels une aiguille aimantée horizontale est mobile.

Ces deux circuits sont mis d'un côté en communication avec le même pôle C de la source électrique P, de façon à être parcourus en sens opposé par le courant ; l'autre extrémité de l'un d'eux, *b*, est reliée à l'autre pôle, Z, de la pile par le conducteur dont on mesure la résistance, soit directement, soit par l'intermédiaire de la terre, le conducteur L et le pôle Z étant, dans ce dernier cas, mis en communication avec le sol comme dans la figure ; enfin l'autre extrémité du second fil de la boussole

d est en communication avec le pôle Z par un appareil de résistance formé de bobines étalonnées qu'on introduit dans le circuit en les choisissant convenablement

Fig. 75.



pour que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro. La résistance ainsi introduite est égale à celle du conducteur à mesurer, L.

316. L'espace occupé par les deux fils autour de l'aiguille étant donné, on peut se proposer de chercher la section du fil à enrouler sur le cadre pour obtenir la plus grande sensibilité possible. La disposition cherchée correspond au cas où un petit changement de la résistance extérieure produit le maximum d'effet sur l'aiguille.

Nous supposerons, comme au n° 204, qu'une longueur donnée du fil du galvanomètre parcouru par le courant produit le même effet sur l'aiguille quelle que soit sa position sur le cadre.

Soit V le volume consacré au fil, dont chacun des deux circuits occupe la moitié, *a* la section des deux fils, *h* la conductibilité du métal employé, R la résistance exté-

rieure, et K un coefficient constant dépendant de la forme de l'instrument ; on a pour l'action A exercée par un des circuits traversés par le courant sur l'aiguille aimantée (n° 204) :

$$A = \frac{\frac{1}{2} K\pi h E V a^2}{\pi^2 h R a^4 + \frac{1}{2} V}.$$

Remplaçons, pour simplifier, *a* par sa valeur en fonction de la résistance *r* du fil qu'on déduit de l'équation

$$r = \frac{\frac{1}{2} V}{\pi^2 h a^4},$$

il vient, en représentant par C une constante dépendant du volume V, de la forme du cadre et de la conductibilité du fil employé :

$$A = C \times \frac{\sqrt{r}}{R + r}.$$

Le second circuit de la boussole produit, en représentant par L la résistance du fil extérieur, une action

$$A' = C \times \frac{\sqrt{r}}{L + r},$$

qui est égale à la précédente si $L = R$, et dans ce cas l'aiguille du galvanomètre reste au zéro.

Supposons que l'égalité ne soit pas absolue et que les deux résistances soient L et $R = L + \alpha$, α ayant d'ailleurs une valeur très faible, l'action exercée par le premier fil du cadre sera

$$A' = C \frac{\sqrt{r}}{L + \alpha + r},$$

et l'aiguille sera soumise à une force due à la différence

de ces deux actions, qui aura pour valeur

$$A - A' = C\left(\frac{\sqrt{r}}{L + r} - \frac{\sqrt{r}}{L + \alpha + r}\right) = \frac{C\alpha\sqrt{r}}{(L + r)(L + \alpha + r)},$$

ou, en négligeant α devant L,

$$A - A' = \frac{C\alpha\sqrt{r}}{(L + r)^2}.$$

Il faut déterminer dans cette expression r de façon que $A - A'$ soit maximum, ce qui, en égalant à zéro la dérivée du second nombre, conduit à l'équation de condition

$$\frac{1}{2}(L + r)^2 r^{-\frac{1}{2}} - 2(L + r)r^{\frac{1}{2}} = 0,$$

ou

$$L = 3r \quad \text{et} \quad r = \frac{L}{3},$$

Ainsi, on obtiendra la plus grande sensibilité lorsque la résistance de chacune des bobines du galvanomètre différentiel sera égale à $\frac{1}{3}$ de la résistanee extérieure; on doit donc, si l'on a plusieurs galvanomètres à sa disposition, prendre celui dont le fil se rapproche le plus de cette condition.

317. Si la résistance à mesurer est trop considérable pour qu'on puisse la reproduire artificiellement en R (*fig.* 75), on établit une dérivation entre les deux bornes qui correspondent au circuit local, d et c, de façon qu'une partie seulement du courant traverse le fil du galvanomètre.

Supposons que la résistance de cette dérivation soit ρ, l'intensité du courant local qui traversera le galvanomètre aura pour valeur :

$$\frac{E}{R + \frac{r\rho}{r + \rho}} \times \frac{\rho}{r + \rho} = \frac{E\rho}{Rr + R\rho + r\rho};$$

elle sera égale à l'intensité $\frac{E}{L + r}$ du courant qui traverse l'autre circuit, si

$$\frac{\rho}{Rr + R\rho + r\rho} = \frac{1}{L + r},$$

ou si

$$L = R\frac{r + \rho}{\rho}$$

la résistance R dont on a besoin, n'est plus alors qu'une fraction $\frac{\rho}{r + \rho}$ de la résistance à mesurer.

Afin de faciliter les calculs on prend pour ρ, comme il a été indiqué au n° 201, des résistances égales à $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$ de celle du fil, r, du galvanomètre de façon que $\frac{r + \rho}{\rho}$ représente une puissance de 10 égale à 10, 100, 1000, etc.

318. Lorsque, au contraire, la résistance à mesurer est très faible, on intercale les résistances entre les bornes *a* et *b* (*fig.* 75). Si ρ est la résistance introduite on a

$$L = R \times \frac{\rho}{r + \rho}.$$

La résistance L n'est plus qu'une fraction $\frac{\rho}{r + \rho}$ de R, fraction qui est de $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, et $\frac{1}{1000}$, si ρ est égal à $\frac{r}{9}$, $\frac{r}{99}$, $\frac{r}{999}$, etc.

M. Latimer Clark a donné à la boussole différentielle une forme commode qui permet de l'adapter facilement à tous les usages.

219. ***Mesure des résistances par le pont de Wheatstone.***

— La mesure des résistances se fait le plus habituellement à l'aide du pont de Wheatstone. En A en C (*fig.* 73) on dispose deux résistances connues ayant un rapport convenable, en T le conducteur à mesurer et en R des bobines qu'on choisit de façon que l'aiguille du galvanomètre reste au repos lorsqu'on ferme le circuit.

Lorsque l'équilibre est établi, on a entre les résistances P, R, A et C la relation $\frac{T}{R} = \frac{C}{A}$, qui donne

$$T = \frac{C}{A} \times R.$$

On aurait la même relation si l'on faisait aboutir le galvanomètre C aux deux points Y et Z, et la pile P aux points U et V.

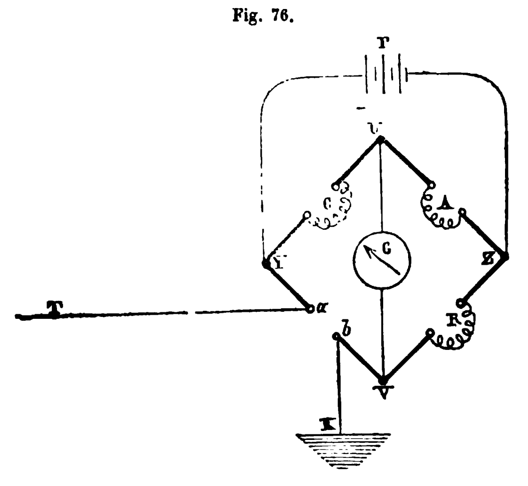
Lorsqu'on peut avoir, avec des bobines, une résistance R égale à celle du conducteur à mesurer, T, on prend $C = A$.

Si l'on veut mesurer des résistances considérables on prend C plus grand que A, en adoptant un rapport $\frac{A}{C}$ tel que l'on puisse placer en R une résistance égale à $T \times \frac{A}{C}$. Enfin pour mesurer de très faibles résistances on prend, pour avoir une plus grande approximation, A plus grand que C de façon que T ne soit qu'une fraction de R.

Quand le conducteur dont on veut avoir la résistance est en communication avec la terre, ce qui arrive, par exemple, si ce conducteur est un fil télégraphique ou l'enveloppe d'un câble sous-marin, on le met en communication avec une borne *a* (*fig.* 76) située sur la branche YV du pont, l'autre borne, *b*, par laquelle se complète le circuit étant en communication avec la terre par le fil *b*K.

320. La précision avec laquelle on peut mesurer une résistance dépend de la sensibilité de la boussole, qui

Fig. 76.



varie avec le nombre de tours que forme le fil sur le cadre ; on peut se proposer de chercher les conditions que doit remplir le fil pour réaliser le maximum de sensibilité lorsque les quatre côtés du pont et la force électromotrice de la pile sont donnés.

L'intensité du courant dans les diverses branches du pont se déterminent au moyen des six équations données au n° 116 ; on en tire facilement pour la valeur de l'intensité à travers le fil du galvanomètre, la seule dont on ait à s'occuper, en représentant par a, c, r, t, g et p les résistances des six branches A, C, R, T, G et P (*fig.* 73), que nous avions désignées au n° 116 par R_2, R_3, R_4, R_5, R_6, et R_1 :

$$I = \frac{E(cr - at)}{pg(a+c+r+t)+g(a+c)(t+r)+p(a+r)(c+t)+ar(c+t)+ct(a+r)}.$$

Cette équation donne $I = 0$ lorsque $at = cr$, condition d'équilibre du pont.

Supposons que cette condition entre les quatre côtés ne soit pas remplie exactement et que la résistance de la branche R soit égale à $r + \delta$, r étant égal à $\frac{at}{c}$ et δ ayant une valeur très faible qui ne modifie pas sensiblement le dénominateur. Si nous représentons ce dénominateur par M, l'intensité I du courant est :

$$I = \frac{Ec\delta}{M}.$$

L'action du courant sur l'aiguille aimantée est proportionnelle à la longueur du fil enroulé sur le cadre ou à la racine de sa résistance, $\sqrt{g}$ (*)

En représentant par X cette action et par K une constante on peut donc poser :

$$X = \frac{KEc\delta\sqrt{g}}{M}.$$

321. On obtient une formule encore plus générale en supposant donné le nombre total des éléments de la pile employée, et en admettant qu'on puisse les accoupler d'une manière quelconque, ou plus généralement que la surface totale de la pile soit donnée, et qu'on puisse la diviser à volonté en parties égales de façon à construire autant d'éléments qu'on veut.

Soit e la force électromotrice due à l'action chimique

(*) Si en effet l est la longueur du fil, s sa section, et h sa conductibilité, sa résistance g est :

$$g = \frac{l}{hs};$$

d'un autre côté, si V est le volume qu'il occupe sur le cadre, on a :

$$V = ls.$$

De ces deux équations on tire :

$$l = \sqrt{g} \times \sqrt{hV}.$$

La longueur l est donc proportionnelle à $\sqrt{g}$.

dans chacun des éléments, P la résistance qu'offrirait la pile si elle ne formait qu'un seul élément à grande surface, et n le nombre des éléments dont elle se compose; on a pour la force électromotrice de la pile entière $E = ne$, et pour sa résistance $p = n^2 P$. De ces deux équations on tire

$$E = \frac{e\sqrt{p}}{\sqrt{P}},$$

en substituant cette expression dans la valeur de X, en remplaçant le dénominateur M par sa valeur et en représentant la constante $\frac{K}{\sqrt{P}}$ par H, on arrive à la formule suivante :

$$X = \frac{Hec\delta\sqrt{p}\sqrt{g}}{pg(a+c+t+r)+g(a+c)(t+r)+p(a+r)(c+t)+ar(c+t)+ct(a+r)},$$

qu'on doit rendre maximum en faisant varier p et g.

Si l'on suppose que la section du fil enroulé sur le cadre du galvanomètre soit seule variable, on a pour la valeur de g qui correspond au maximun de X (*) :

$$g = \frac{p(a+r)(c+t) + ar(c+t) + ct(a+r)}{p(a+c+t+r) + (a+c)(t+r)},$$

équation qui se réduit à

$$g = \frac{(a+r)(c+t)}{a+c+t+r},$$

si l'on tient compte de la relation $at = cr$ qui existe à peu près entre les côtés du pont. On peut s'assurer en effet, en effectuant le calcul, que la différence entre ces deux valeurs de g est nulle.

Le second membre de la formule précédente représente

(*) La formule peut en effet se mettre sous la forme $\frac{C\sqrt{g}}{Ag+B}$, A et B étant des constantes; le maximum correspond au cas où $Ag = B$.

la longueur réduite d'un fil qui offrirait la même résistance que les deux conducteurs $a + r$ et $c + t$, réunis, c'est-à-dire, que les deux doubles branches A + R et C + T (*fig.* 73) qui aboutissent aux deux mêmes sommets U et V du pont que le galvanomètre.

322. On trouve de même qu'en faisant varier les dimensions et le nombre des éléments de la pile, la surface totale restant la même, la valeur maximum de X correspond au cas où $p = \frac{(a+c)(t+r)}{a+c+t+r}$, c'est-à-dire au cas où les éléments sont disposés de façon que la pile entière offre une résistance égale à celle des conducteurs réunis $a + c$ et $t + r$, c'est-à-dire A + C et T + R (*fig.* 73).

Les deux valeurs de r et de g, qui correspondent au maximum, peuvent, en tenant compte de la relation $at = cr$, se mettre sous la forme plus simple :

$$g = \frac{a+r}{a+c} \times c$$

et

$$p = \frac{a+c}{a+r} \times r.$$

Pour la mesure des grandes résistances on ne peut qu'accoupler en tension, en les plaçant à la suite les uns des autres, les éléments dont on dispose, mais pour le galvanomètre on doit le choisir de façon à l'approprier au genre de recherches qu'on peut avoir à faire, en choisissant le fil qu'on enroule sur le cadre de façon à se rapprocher le plus possible de la loi qui précède.

323. Lorsque les côtés du pont sont donnés ainsi que la pile et le galvanomètre on peut se demander s'il est préférable de faire aboutir ce dernier, comme dans la *fig.* 73, aux sommets U et V, les pôles de la pile étant

reliés aux points Y et Z, ou d'adopter la disposition inverse.

L'intensité I du courant qui produit la déviation, lorsque $cr - at$ n'est pas rigoureusement égal à zéro, est représentée par la formule du n° 320.

En représentant B la partie du dénominateur

$$pg(a + c + r + t) + ar(c + t) + ct(a + r),$$

qui reste constante dans les deux cas, on a pour l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre dans le premier, celui de la figure 73

$$I = \frac{Ec\delta}{B + g(a + c)(t + r) + p(a + r)(c + t)},$$

et dans le second, c'est-à-dire lorsque le galvanomètre est relié aux points Y et Z, et la pile aux points U et V

$$I' = \frac{Ec\delta}{B + p(a + c)(t + r) + g(a + r)(c + t)}.$$

La différence I — I' peut se mettre sous la forme

$$I - I' = K(g - p)(t - a)(r - c),$$

K représentant un facteur positif.

Si les résistances des quatre côtés du pont diminuent selon l'ordre t, r, c et a, les termes $t - a$ et $r - c$ sont positifs et la différence I — I' est de même signe que $g - p$. Ainsi I est plus grand que I' lorsque le fil du galvanomètre a une résistance supérieure à celle de la pile, ce qui est le cas ordiniare. On a donc une sensibilité plus grande lorsqu'on met, comme dans la *fig.* 73, le galvanomètre en communication avec les points de jonction U et V, des deux plus grandes et des deux plus petites résistances du pont.

La valeur I — I' serait négative si g était plus petit que p et la disposition inverse devrait être adoptée. Enfin si p était égal à r, on aurait $I = I'$.

324. Pour l'étude des conducteurs télégraphiques on prend ordinairement pour les branches A et C du pont (*fig.* 73) des résistances égales à 10, 100, 1000 ohms, qu'on choisit suivant les cas, et pour R des résistances qu'on peut faire varier de 1 à 1000 ohms, dans ces conditions la plus grande résistance qu'on puisse mesurer avec l'instrument est égale à $\frac{1000}{10} \times 10{,}000 = 1{,}000{,}000$ ohms, et la plus petite est $\frac{10}{1000} \times 1 = 0{,}01$ ohm.

Pour le galvanomètre on choisit celui dont le fil satisfait le mieux à la loi indiquée plus haut. Si, par exemple, les résistances à mesurer sont comprises entre 100,000 et 1,000,000 ohms, soit en moyenne 550,000 ohms, on prendra $a = 10$, $c = 1{,}000$ et $r = 5{,}500$: en substituant ces nombres dans l'équation $g = \frac{a+r}{a+c} \times c$, on trouve pour la résistance à adopter pour le fil du galvanomètre $g = 5{,}455$ ohms.

Ordinairement le fil enroulé sur le cadre est divisé en deux parties égales qu'on peut intercaler dans le circuit soit à la suite l'une de l'autre, soit parallèlement ; dans ce dernier cas la résistance est réduite au quart. On choisit la combinaison la plus convenable suivant les grandeurs qu'on a à mesurer (*).

325. Si les résistances à mesurer varient dans des limites très étendues, on forme les deux bobines qui entourent le cadre du galvanomètre de fils de même longueur mais de diamètres différents, et par conséquent dont les résistances, x et y, sont inégales.

Lorsque les fils sont placés dans le circuit à la suite l'un de l'autre on a pour la résistance totale, G, du fil

(*) Voir l'Instruction *for Testing Telegraph lines* de M. Culley.

$G = x + y$. S'ils sont introduits parallèlement dans le circuit la résistance, g, est $g = \frac{xy}{x+y}$.

G et g doivent être égaux aux deux résistances moyennes qu'on a à mesurer avec le même instrument ; ces deux résistances étant connues, on en déduit les valeurs de x et de y :

$$x = \frac{G}{2} + \sqrt{\frac{G^2}{4} - gG},$$

et

$$y = \frac{G}{2} - \sqrt{\frac{G^2}{4} - gG}.$$

326. *Mesure par la méthode électrostatique.* — On peut enfin, pour l'étude de très grandes résistances, employer la méthode indiquée au n° 122 pour leur mesure en unités électrostatiques. Si, après avoir électrisé à un potentiel V une des armatures d'un condensateur, dont l'autre est en communication avec la terre, on opère la décharge par le fil dont on veut avoir la résistance, on a, en représentant cette résistance par R, la capacité du condensateur par S et le potentiel au bout d'un nombre t de secondes par V_1 :

$$R = \frac{t}{S \log \text{nép.} \frac{V}{V_1}}.$$

Cette formule établie dans le système électrostatique est également applicable au système électro-magnétique, puisque le produit RS est le même dans les deux cas (*)

Si l'on prend pour t le temps qu'emploie la charge

(*) R et S étant les résistances et la capacité électrostatique dans le système électro-magnétique, r et s dans le système électrostatique, on a $s = v^2 S$ et $r = \frac{R}{v^2}$, d'où $rs = RS$.

à décroître de moitié, log. nep. $\frac{V}{V_1}$ = log. nep. 2 = 0,216 et

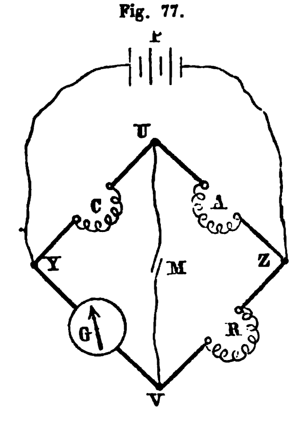
$$R = \frac{t}{S \times 0.216},$$

Pour avoir la valeur de R, il faut donc connaître la capacité d'un condensateur en unités électro-magnétiques absolues ou en unités de l'Association Britannique.

Cette méthode s'emploie souvent pour l'étude de l'isolement des câbles sous-marins. Le temps qu'emploie la charge à décroître d'une fraction déterminée est, ainsi qu'on l'a vu (n° 123), indépendant de la longueur et de la forme du câble essayé et varie seulement avec la qualité de la matière isolante.

327. *Mesure de la résistance du fil d'un galvanomètre.* — La résistance du fil d'un galvanomètre peut se mesurer comme celle d'un conducteur ordinaire par une des méthodes indiquées précédemment, en employant un second galvanomètre. On peut également à l'aide d'un pont de Wheatstone effectuer cette détermination avec le seul galvanomètre dont on veut avoir la résistance. A et C (*fig.* 77), étant deux résistances égales, on place le galvanomètre G sur un des côtés YV du pont ; en R on dispose une résistance variable, et sur la diagonale UV un interrupteur M.

Fig. 77.



L'aiguille du galvanomètre G dévie, mais cette déviation ne change pas lorsqu'on ferme le circuit du conducteur UV à l'aide du manipulateur M, si les deux résistances G et R sont égales, puisqu'alors il ne passe

aucun courant à travers le conducteur VU. Il suffit donc de faire varier la résistance R jusqu'à ce que cette condition soit remplie.

328. *Mesure de la résistance des piles.* — Les méthodes rappelées plus haut pour la mesure des résistances, ne s'appliquent pas au cas où une source électrique se trouve sur le parcours du conducteur, lorsqu'on veut, par exemple, avoir la résistance d'une pile électrique. Nous avons indiqué (n° 199) comment on peut procéder en introduisant d'abord dans le circuit un galvanomètre dont la résistance r soit connue, puis une résistance additionnelle également connue ρ et en observant les intensités I_1 et I_2, accusées par le galvanomètre. On a pour la résistance x de la partie fixe du circuit (R du n° 199) :

$$x = \frac{I_2(r+\rho) - I_1 r}{I_1 - I_2}.$$

La résistance x est celle de la pile augmentée, s'il est nécessaire, d'une résistance additionnelle connue qui ramène la déviation dans des limites convenables et qu'on retranche ensuite.

Plusieurs autres méthodes peuvent être employées, voici les principales.

329. On ferme le circuit de la pile par l'intermédiaire d'une boussole de sinus ou d'un galvanomètre gradué. On observe la déviation de l'aiguille et on ajoute des bobines de résistance jusqu'à ce que l'intensité soit réduite de moitié.

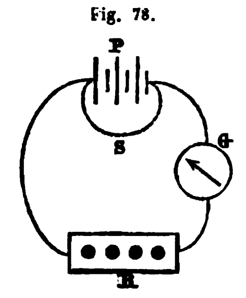
La résistance ainsi ajoutée est égale à celle du circuit primitif; si donc, on en déduit celle du galvano-

(*) Voir le *Traité élémentaire de la mesure électrique* de M. Latimer Clark.

mètre et des communications fixes on a celle de la pile.

330. — La méthode suivante a été indiquée par sir William-Thomson : on ferme le circuit de la pile P, par l'intermédiaire d'un rhéostat R et d'un galvanomètre G (*fig.* 78), et l'on observe la déviation de l'aiguille; on réunit ensuite les deux pôles par un second conducteur S de résistance connue, ρ.

Fig. 78.



La déviation de l'aiguille du galvanomètre diminue, mais on peut maintenir à la déviation sa valeur primitive en réduisant la résistance du rhéostat; si R_1 est sa nouvelle résistance, x celle de la pile, et si G représente celle du fil du galvanomètre et des conducteurs fixes, on a, pour l'intensité du courant qui traverse le galvanomètre dans les deux cas,

$$\frac{E}{x + R + G} \quad \text{et} \quad \frac{E\rho}{x(R_1 + G + \rho) + \rho(R_1 + G)}.$$

En égalant ces deux valeurs on trouve pour x :

$$x = \frac{R - R_1}{R_1 + G} \times \rho.$$

331. M. Latimer Clark effectue cette détermination au moyen d'un galvanomètre différentiel à fil gros et court. On fait traverser au courant un seul des circuits du galvanomètre et on note la déviation; si r est la résistance du fil du galvanomètre et x celle de la pile, l'action sur l'aiguille est proportionnelle à $\frac{E}{x + r}$. On fait ensuite traverser au courant les deux circuits du galvanomètre et l'on ajoute une résistance ρ telle que la déviation de l'aiguille revienne à sa première amplitude, on a pour la

nouvelle action magnétique

$$\frac{2E}{x + 2r + \rho},$$

La déviation étant la même dans les deux cas, ces deux valeurs sont égales et l'on a :

$$x+r = \frac{x + 2r + \rho}{2}$$

ou

$$x = \rho.$$

332. Lorsque la pile se compose d'éléments identiques, on peut la diviser en deux parties égales qu'on oppose l'une à l'autre de façon que les courants qu'elles produisent s'annulent, puis on mesure la résistance totale comme celle d'un conducteur ordinaire à l'aide d'une autre pile, d'un galvanomètre et d'un rhéostat.

333. Enfin cette détermination peut se faire à l'aide d'un électromètre : on mesure la différence des potentiels aux deux extrémités de la pile lorsque le circuit est ouvert, puis on réunit les deux pôles par un fil dont on fait varier la longueur, et par suite la résistance jusqu'à ce que la différence des potentiels aux deux pôles soit réduite de moitié ; la résistance ainsi introduite est égale à celle de la pile. L'intensité du courant peut, en effet, être représentée par $\frac{E}{x + R}$ ou par $\frac{\frac{1}{2}E}{R}$, ce qui, en égalant les deux expressions, conduit à

$$x = R.$$

Résistance et conductibilité spécifiques.

334. La résistance spécifique d'une substance est sa résistance rapportée à l'unité de volume ; c'est celle qu'offrirait un cube de cette substance, dont le côté serait

égal à l'unité de longueur et dont les deux faces parallèles seraient maintenues à des potentiels différents.

Il serait naturel d'adopter pour le côté de ce cube l'unité de longueur employée pour la détermination de l'ohm, c'est-à-dire le mètre multiplié par 10^7. Mais, comme dans la pratique on a ordinairement à mesurer la résistance de corps dont les dimensions sont exprimées en fonction du mètre ou de ses multiples ou sous-multiples ordinaires, on rapporte ordinairement la résistance spécifique à un cube dont le côté est un de ces multiples ou sous-multiples.

La conductibilité d'une substance est l'inverse de la résistance spécifique; elle s'obtient en divisant l'unité par le chiffre qui représente la résistance spécifique.

La valeur de la résistance spécifique d'une matière se déduit de la résistance absolue d'un conducteur prismatique de longueur et de section connues formé de cette substance; en nommant ρ cette résistance spécifique, l, s et r la longueur, la section et la résistance absolue du conducteur, on a :

$$r = \frac{l\rho}{s}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{rs}{l}.$$

La valeur de ρ dépend des unités adoptées pour mesurer la résistance r et le rapport $\frac{s}{l}$, qui représente une longueur.

Les résistances et les conductibilités sont souvent rapportées à l'unité de longueur et à l'unité de poids (n° 110).

335. *Résistance spécifique des métaux.* — La table suivante donne la résistance et la conductibilité spécifiques des principaux métaux chimiquement purs à la température de 0° centigrade. Les résistances sont exprimées en microhms et se rapportent au centimètre cube;

elles sont déduites d'expériences récentes de M. Matthiessen.

	Résistance spécifique.	Conductibilité.
Argent écroui.	1,652	0,605
— recuit.	1,521	0,657
Cuivre écroui.	1,653	0,604
— recuit.	1,616	0,618
Or écroui.	2,118	0,472
— recuit.	2,081	0,480
Aluminium.	2,945	0,329
Zinc.	5,689	0,175
Platine.	9,158	0,109
Fer.	9,825	0,102
Nickel.	12,60	0,079
Étain.	13,36	0,075
Plomb.	19,85	0,050
Antimoine.	35,90	0.028
Mercure.	99,74	0,010

La résistance spécifique des alliages est beaucoup plus grande que celle des métaux qui entrent dans leur composition. Ainsi, l'alliage de 2 parties d'argent et 1 de platine, qui sert pour les reproductions de l'étalon de l'Association Britannique, a pour résistance spécifique 21,7, alors que si les deux métaux se comportaient isolément cette résistance serait seulement, d'après le tableau précédent, 4,15. Un alliage de 2 parties d'or et 1 d'argent a pour résistance spécifique 10,99, au lieu de 1,96 que donnerait la simple juxtaposition des deux métaux.

336. Les métaux usuels ne sont jamais chimiquement purs, aussi leur résistance spécifique est-elle plus grande que celle indiquée dans le tableau précédent. Celle du cuivre ordinaire du commerce, par exemple, varie de 2,30 à 4.03, et l'on comprend l'importance d'avoir des métaux aussi purs que possible pour la construction des lignes électriques. La résistance spécifique du cuivre employé pour les conducteurs sous-marins est seulement de 5 à 8 pour 100 plus élevée que celle du cuivre pur ; sa

valeur varie de 1.697 à 1.860 microhms par centimètre cube, et par conséquent sa conductibilité de 0,601 à 0,544.

337. La résistance spécifique du fer qu'on emploie pour la construction des lignes télégraphiques aériennes varie de 11,65 à 13,08.

La résistance r d'un fil de longueur l et de section s, formé d'un métal de conductibilité spécifique ρ est $r = \frac{l\rho}{s}$. Si ρ est rapporté au centimètre cube et représente des microhms, et si l et s sont aussi exprimés en centimètres, la résistance r est donnée en microhms.

La résistance du kilomètre de fil de fer de 4 millimètres de diamètre, qui est le fil employé pour les lignes télégraphiques de longueur moyenne, est donc comprise entre $\frac{11,65 \times 100.000}{\pi \times 0,04}$ et $\frac{13,08 \times 100.000}{\pi \times 0,04}$ ou entre 9.270.000 et 10.410.000 microhms, soit entre 9,27 et 10,41 Ohms. On admet ordinairement le nombre 10 pour la résistance en Ohms du kilomètre de fil de fer de 4 millimètres.

338. La résistance spécifique des métaux s'accroît avec l'élévation de la température ; il n'y a d'exception à cette règle que pour certains alliages qui ont un maximum de densité et pour lesquels la résistance décroît lorsqu'on dépasse la température, toujours assez élevée d'ailleurs, qui correspond à ce maximum.

La variation de la résistance spécifique est assez régulière jusqu'à 200 degrés centigrades.

On a, d'abord, admis pour la loi de cette variation la formule suivante :

$$R = r(1 + Kt),$$

r étant la résistance à zéro, R la résistance à t degrés et K un coefficient qui a été déterminé par M. Ed. Becque-

rel pour un certain nombre de métaux ; ce coefficient varie de 0,00367 à 0,00435, si t représente des degrés centigrades, pour les métaux purs solides, or, argent, zinc, cuivre, plomb, etc.

A la suite d'expériences récentes, M. le docteur Matthiessen a été conduit à admettre pour la loi de cette variation la formule

$$R = r(1 + at + bt^2),$$

le coefficient b étant négatif pour certains métaux. Les valeurs de a et de b sont :

	a.	b.
Pour les métaux purs.	0,00384	+ 0,00000126
Pour le mercure.	0,0007485	— 0,000000398
Alliage, 2 parties d'or et 1 d'argent.	0,0006999	+ 0,000000152
Argent allemand (maillechort). . .	0,0004433	— 0,000000062

339. *Résistance spécifique des corps non métalliques.* — La résistance spécifique des corps non métalliques est infiniment plus grande que celle des métaux, et, contrairement à ce qui a lieu pour ces derniers, l'élévation de la température a toujours pour effet d'accroître leur conductibilité, ou de diminuer leur résistance. Cette résistance est souvent assez difficile à mesurer, à cause de la polarisation des électrodes qui se produit lorsque le courant passe.

Pour les dissolutions acides et salines, la conductibilité varie avec le degré de concentration, et, dans certains cas, il y a un maximum de conductibilité qui correspond à une concentration déterminée. Ainsi, pour l'acide sulfurique étendu d'eau, la résistance minimum correspond au cas où la densité est 1,25 ; pour le sel marin, le minimum correspond au cas où la dissolution contient 24 pour 100 de sel. Pour les dissolutions de sulfate de cuivre et de sulfate de zinc, au contraire, la résistance

spécifique est d'autant moindre qu'elles sont plus concentrées. Les lois qui régissent les variations de conductibilité des mélanges ne sont pas encore parfaitement connues.

Le tableau suivant donne la résistance spécifique de quelques liquides exprimée en ohms et correspondant à un volume d'un centimètre cube aux températures de 14 à 24 degrés centigrades.

	14°.	24°.
Dissolution de sulfate de cuivre (8 p. 100). . .	45,7	37,1
— — concentrée (28 p. 100). .	24,7	18,8
— saturée de sulfate de zinc concentrée.	21,5	17,3
— d'acide sulfurique (densité 1,10). .	0,88	0,73
— — (densité 1,70). .	4,67	3,07
Acide nitrique (densité 1,36).	1,45	1,22
Eau distillée. . . . . environ	9320	

Une quantité presque imperceptible d'acide diminue dans une proportion très notable la résistance spécifique de l'eau pure.

340. Les corps solides non métalliques ont ordinairement une résistance spécifique très considérable, qui diminue avec l'élévation de la température et varie avec leur état physique : ainsi le charbon à l'état de graphite a une résistance spécifique qui, rapportée au centimètre cube, varie de 2,390 à 41,800 microhms à la température d'environ 22 degrés. Celle du coke qui sert à la construction des batteries électriques est d'environ 67,200 microhms.

La résistance spécifique du verre et de la porcelaine est presque infinie à la température ordinaire; on a en effet des bouteilles de Leyde qui ne perdent pas plus de $\frac{1}{400}$ de leur charge par jour, et encore la plus grande partie de la perte peut-elle être attribuée à la conductibilité de la surface sur laquelle se dépose toujours un

peu de vapeur d'eau. Mais lorsque la température s'élève le verre devient conducteur, et les chiffres suivants, déduits d'expériences faites par Buff, donnent en ohms la résistance d'un mètre cube de verre à diverses températures (*) :

à 200 degrés centigrades.	227000
250 — —	13900
300 — —	1480
350 — —	1035
400 — —	735

Les résistances varient d'ailleurs suivant la composition des verres essayés.

341. *Résistance spécifique de la gutta-percha.* — La gutta-percha et le caoutchouc, qui servent à l'isolement des conducteurs souterrains et sous-marins, ont été étudiés plus complètement et ont conduit à des résultats qui sont probablement applicables à la plupart des substances organiques.

La résistance spécifique de la gutta-percha dépend de sa qualité et de son degré d'épuration; elle peut varier dans la proportion de 1 à 20.

Ainsi la résistance à 24 degrés centigrades, après une minute d'électrisation, d'un centimètre cube de cette matière est seulement de 25×10^{12} ohms pour certains échantillons, alors que pour la gutta-percha perfectionnée, telle qu'on l'emploie actuellement pour la fabrication des câbles sous-marins, elle peut atteindre 500×10^{12} ohms ; on se contente ordinairement d'exiger des fabricants un isolement d'environ 180 à 200 fois 10^{12} ohms, qui est en général dépassé de beaucoup.

342. Pour une même gutta-percha, la résistance spécifique dépend de la température, de la durée d'électrisation et de la pression extérieure.

(*) *Traité d'électricité et de magnétisme* de M. Maxwell.

MM. Clark et Bright ont été conduits, à la suite d'expériences faites sur le câble du golfe Persique, à la formule empirique suivante, qui représente assez exactement l'influence de la température sur la résistance spécifique de la gutta-percha, de 0° à 24° centigrades :

$$R = R_0 a^{(t-t_0)}$$

ou

$$\log R = \log R_0 + (t - t_0) \log . a.$$

R est la résistance à la température de t degrés centigrades, R_0 la résistance à la température t_0 et a un coefficient qui reste sensiblement constant, lorsqu'on prend la résistance après une même durée d'émission du courant, et dont la valeur, après une minute, varie de 0,8878 à 0,9, et est en moyenne 0,8944.

Si l'on prend pour point de départ la résistance spécifique de la gutta-percha à 0 degré on a donc, pour la résistance t degré, la formule

$$R = R_0 \times (0.8944)^t.$$

D'après cette formule, la résistance spécifique est réduite à la moitié à 6°,2, au quart à 12°,4, etc. ; les nombres qu'elle donne correspondent approximativement aux résultats de l'expérience qui sont consignés dans le tableau suivant, pour des températures variant de 0 à 38 degrés centigrades.

Température en degrés centigrades.	Résistance.	Température en degrés centigrades.	Résistance.
0	100.00	20	8,45
2	84,14	22	6,82
4	64,66	24	5,51
6	47,65	26	4,47
8	37,15	28	3,61
10	28,97	30	2,99
12	23,18	32	2,48
14	16,89	34	1,92
16	14,37	36	1,68
18	11.05	38	1,43

343. La résistance spécifique de la gutta-percha augmente avec la durée du courant qui la traverse. Cet effet paraît dû à une sorte de polarisation électrique des molécules de la matière isolante, qui produit un effet analogue à celui de la charge de plusieurs bouteilles de Leyde montées en cascade et séparées les unes des autres par des fils très résistants.

Cette variation de la résistance spécifique avec la durée du courant n'est pas la même aux diverses températures ; elle est d'autant plus faible que la température est plus élevée.

Le tableau suivant donne cette variation à 0 et à 24 degrés centigrades pour différentes durées d'émission de courant.

Minutes d'électrisation.	Résistance à 0°.	Résistance à 24°.
1	100,0	5,51
2	127,9	6,00
5	163,1	6,66
10	190,9	6,94
20	230,8	7,38
30	250,6	7,44
60	290,4	7,60
90	318,3	7,66

Il est donc nécessaire, dans les essais d'isolement de l'enveloppe isolante d'un câble télégraphique, de spécifier exactement le temps qui s'écoule entre le moment de l'émission du courant et celui où l'on observe la perte d'électricité par l'enveloppe isolante. Ce temps est ordinairement fixé à une minute dans les cahiers des charges relatifs à la fabrication et à la pose des câbles.

344. Enfin la pression a pour effet d'accroître le pouvoir isolant de la gutta-percha. M. Siemens représente cette variation par la formule suivante, qu'il a déduite de l'expérience :

$$R_p = R(1 + 0.00327p),$$

dans laquelle R est la résistance spécifique à la pression atmosphérique ordinaire et R_p la résistance spécifique à la pression p, exprimée en kilogrammes par centimètres carrés, ou, ce qui revient au même, en atmosphères.

D'après cette formule, à la profondeur de 4,000 mètres sous l'eau, la résistance spécifique R de la gutta-percha devient $R_p = R\,(1 + 0{,}00327 \times 400) = R \times 2{,}308$; elle est plus que doublée.

La constante 0,00327 doit d'ailleurs varier un peu avec les divers échantillons de gutta-percha.

Enfin la résistance spécifique de la gutta-percha paraît s'accroître notablement lorsque son séjour dans l'eau se prolonge longtemps.

345. *Conditions exigées pour la construction des câbles sous-marins.* — Dans les marchés qui sont passés pour la construction et l'immersion des câbles sous-marins, on fixe ordinairement le poids et la résistance électrique du conducteur et de l'enveloppe isolante par unité de longueur, mille ou kilomètre.

Prenons comme exemple le câble posé en 1859 entre Marseille et Alger, dont l'âme correspond à l'un des types les plus employés dans la télégraphie sous-marine (*).

Le poids du conducteur formé d'un toron de sept fils de cuivre était fixé d'après le cahier des charges à 48 kilogrammes par mille marin (1852 mètres), et sa résistance électrique à la température de 24 degrés centigrades devait être de 12 ohms (unités B.A).

La densité du cuivre étant très sensiblement 8,9, le poids de 48 kilogrammes par mille marin correspond à

(*) Voir l'article publié, à l'occasion de ce câble, dans les *Annales télégraphiques*, par M. Raynaud (n° de mars-avril 1879).

un fil unique de $1^{mm},83$ de diamètre, ou à un toron de 7 fils ayant chacun un diamètre de $0^{mm},73$.

La résistance spécifique, ρ, du cuivre exprimée en microhms par centimètre cube se déduit des deux équations :

$$\frac{\rho l}{s} = R \quad \text{et} \quad \delta l s = P,$$

dans lesquelles s est la section du conducteur, P et R le poids et la résistance d'une longueur l de ce conducteur et δ la densité du métal employé. Les deux équations donnent :

$$\rho = \frac{RP}{\delta l^2},$$

la longueur l devant être rapportée au centimètre, la résistance R au microhm, et le poids P au gramme.

En faisant, dans l'équation précédente, l égal à un mille marin ou à 185.200 centimètres, $P = 48$ kilogrammes $= 48.000$ grammes, $R = 12$ ohms $= 12.000$ microhms, et en remplaçant la densité du cuivre δ par 8,9, on trouve pour la résistance spécifique $\rho = 1,855$, chiffre supérieur d'environ 8 pour 100 à celle du cuivre chimiquement pur (voir le tableau du n° 335).

346. L'enveloppe isolante des conducteurs sous-marins se compose ordinairement de trois couches de gutta-percha, alternant avec autant de couches de composition Chatterton (*Chatterton compound*), composition résineuse (*) destinée à lier entre elles les diverses couches de gutta-percha, et dont la première est appliquée sur le fil de cuivre.

Pour le câble d'Algérie, que nous prenons comme

(*) La composition Chatterton renferme en poids 1 goudron de Stockholm, 1 de résine et 3 de gutta-percha.

exemple, le poids de cette enveloppe, dont la densité est 0,89, était fixé à 63 kilogrammes par mille marin; dans les essais faits avant que l'âme ne fût couverte de son armature extérieure, elle devait avoir un isolement supérieur à 200 millions d'ohms par mille marin après un séjour de vingt-quatre heures dans l'eau à 24 degrés centigrades, cet isolement étant mesuré après une minute de charge.

Au moment de la réception définitive, après l'immersion, l'isolement devait être d'au moins 600 millions d'ohms par mille marin, sans correction de température.

On peut déduire de ces données la résistance spécifique de la matière isolante.

347. La résistance d'un volume cylindrique, prise normalement à l'axe, est, en nommant l sa longueur, a et b les rayons intérieurs et extérieurs, et h la conductibilité (nº 119) :

$$R = \frac{1}{2\pi h l} \text{ log nép. } \frac{b}{a}.$$

En appliquant cette formule (*) à l'enveloppe d'un câble sous-marin et remplaçant la conductibilité h par l'inverse de la résistance spécifique de la gutta-percha que nous représenterons par ρ_1, le rapport des rayons $\frac{b}{a}$ par celui des diamètres $\frac{D}{d}$ du conducteur et de l'enveloppe, et les logarithmes népériens par les logarithmes ordinaires, on a, pour la résistance d'isolement

(*) Cette formule établie dans le système électro-statique s'applique au système électro-magnétique, puisqu'elle est fondée uniquement sur la loi d'ohm.

R_1, correspondant à une longueur l du câble :

$$R_1 = \frac{1}{0.4343} \times \frac{\rho_1}{2\pi l} \log \frac{D}{d}.$$

Le rapport $\frac{D}{d}$ des diamètres se déduit des poids par unité de longueur et des densités du cuivre et de la gutta-percha. On a, en effet, en nommant P_1 le poids de gutta-percha qui correspond à une longueur l, et δ_1 la densité de cette matière,

$$P_1 = \frac{\pi(D^2 - d^2)l\delta_1}{4}.$$

Le poids P du cuivre correspondant à la même longueur l est, si l'on suppose le conducteur formé d'un fil unique dont δ est la densité :

$$P = \frac{\pi d^2 l\delta}{4},$$

de ces deux équations on tire :

$$\frac{D^2}{d^2} = 1 + \frac{P_1}{P}\frac{\delta}{\delta_1}$$

ou, en remplaçant les poids P_1 et P par les valeurs fixées dans le cahier de charges, 63 et 48 kilogrammes par mille, δ et δ_1 par les densités, 8,9 pour le cuivre et 0,89 pour la gutta-percha :

$$\frac{D^2}{d^2} = 1 + \frac{63}{48} \times \frac{8,9}{0,98} = 12,92,$$

Lorsque le conducteur est formé d'un toron, on diminue la valeur du rapport $\frac{D}{d}$ de 5 pour 100, ce qui conduit à

$$\log \frac{D}{d} = 0.5344.$$

R_1 devient, en remplaçant log. $\frac{D}{d}$ par cette valeur,

$$R_1 = \frac{0,5344}{0,4343} \times \frac{\rho_1}{2\pi l} = \frac{1}{5,105} \frac{\rho_1}{l},$$

et, par suite,

$$\rho_1 = lR_1 \times 5,105.$$

Pour avoir en ohms la valeur de la résistance spécifique ρ rapportée au centimètre cube, il faut exprimer dans cette formule R en ohms et l en centimètres.

Pour le câble d'Algérie, on devait avoir, d'après le cahier des charges, à la température de 24 degrés centigrades, pour une valeur de l égale à un mille marin ou à 185.200 centimètres : $R_1 = 200 \times 10^6$ ohms.

En remplaçant l et R_1 par ces deux valeurs, on trouve, pour la conductibilité spécifique de l'enveloppe à la température d'essai,

$$\rho_1 = 189 \times 10^{12}.$$

L'isolement mesuré était très notablement supérieur à ce chiffre.

348. La mesure de l'isolement est théoriquement indépendante de la force électro-motrice de la pile et du sens du courant émis; néanmoins, dans la pratique, les isolements mesurés sont exprimés par des nombres d'autant plus élevés que la pile dont on fait usage est plus faible, et ces nombres varient un peu avec le sens du courant. Aussi exige-t-on dans les cahiers des charges que les essais soient faits avec des piles ayant une force électromotrice au moins équivalente à 100 éléments Daniell et en envoyant alternativement le courant dans les deux sens. Cette précaution a aussi pour but de mettre à jour des défauts qui pourraient rester masqués si l'on

faisait usage d'une faible force électro-motrice et si le courant envoyé était exclusivement positif.

M. Hockin a constaté que la gutta-percha exposée à une température déterminée ne prend qu'au bout de quelques heures la conductibilité qui correspond à cette température; c'est pour cette raison que, dans les essais de résistance de l'enveloppe des câbles, on exige qu'ils soient plongés dans l'eau à 24 degrés pendant un jour avant les expériences.

349. *Caoutchouc.* — Le caoutchouc vulcanisé a également été employé à la construction des câbles sous-marins, sous le nom de composition Hooper.

La résistance spécifique de cette matière est notablement plus grande que celle de la gutta-percha, et est moins variable avec la température. Rapportée au centimètre cube, elle est à 0° d'environ 32.000×10^{12} ohms et à 24 degrés de 7.500×10^{12}.

Toutefois l'emploi du caoutchouc vulcanisé pour la construction des câbles n'a pas prévalu jusqu'ici, parce qu'il exerce une action chimique sur le cuivre, qui doit être étamé avant d'être recouvert de son enveloppe, et parce qu'il ne s'applique pas à l'état pâteux mais par bandes soudées, ce qui rend la fabrication plus difficile et plus délicate.

350. Le tableau suivant montre la résistance spécifique à 24 degrés centigrades et exprimée en ohms, de l'enveloppe isolante de quelques-uns des principaux câbles sous-marins (*).

Câble de la mer Rouge (gutta-percha).	36×10^{12}
— de Malte à Alexandrie (gutta-percha).	123×10^{12}
Premier câble du golfe Persique —	180×10^{12}
Second câble transatlantique —	342×10^{12}
Second câble du golfe Persique (composition Hooper).	7.470×10^{12}

(*) Jenkin, *Cantor lectures*.

Force électro-motrice et intensité.

351. *Unité de force électro-motrice.* — L'unité adoptée par l'association britannique pour la mesure des forces électro-motrices est l'unité absolue (mètre, seconde, masse du gramme) multipliée par 10^5 ; on lui a donné le nom de volt.

Ce multiple correspond à une grandeur de même ordre que la force électro-motrice de la plupart des éléments voltaïques habituellement employés ; il diffère peu de la force électro-motrice d'un élément Daniell, dont la valeur est environ 107.900 unités absolues, ou 1,079 Volt.

Un million de volts constitue le mégavolt, et un millionnième de volt le microvolt.

352. *Unité d'intensité.* — Les unités de force électro-motrice et de résistance étant fixées, on en déduit l'unité d'intensité par la formule $I = \frac{E}{R}$.

Le volt et l'ohm, adoptés pour unités de force électro-motrice et de résistance, étant égaux à 10^5 et 10^7 fois les unités absolues E_m et R_m, on a pour l'unité d'intensité

$$\frac{10^5 E_m}{10^7 R_m} = \frac{1}{100} \frac{E_m}{R_m} = \frac{I_m}{100};$$

elle est égale à $\frac{1}{100}$ de l'unité absolue (mètre, seconde, masse du gramme) et a reçu le nom de Weber.

On n'a pas adopté de multiple pour cette unité ; comme sous-multiple on prend pour la mesure des faibles intensités le milliweber, égal à un millième du weber.

On désigne quelquefois le weber par la lettre grecque majuscule Γ, et le milliweber par la minuscule γ. Quant

à la force électro-motrice, on ne l'a représentée jusqu'ici par aucun symbole spécial; nous désignerons le volt par la lettre majuscule Δ, et le microvolt par la minuscule δ. ω désignant l'ohm et Ω le megohm (n° 298), on a :

$$\Gamma = 1.000\gamma = \frac{\Delta}{\omega} = \frac{1.000.000\delta}{\omega} = \frac{1.000.000\Delta}{\Omega}.$$

353. *Mesure de l'intensité.* — L'intensité des courants se mesure ordinairement à l'aide d'un galvanomètre, mais, pour avoir la valeur absolue de l'intensité qui correspond à une déviation donnée, il faut que la composante horizontale du magnétisme terrestre soit connue au moment de l'expérience, que le galvanomètre soit une boussole de sinus ou de tangentes, ou qu'il soit préalablement gradué, enfin que sa constante soit déterminée.

Lorsque le galvanomètre est une boussole de tangentes l'intensité absolue du courant qui traverse son fil conducteur est donnée par la formule (n° 191)

$$I = \frac{hr^2 \operatorname{tang} \theta}{l},$$

dans laquelle la composante horizontale h du magnétisme terrestre, le rayon r du cadre et la longueur l du fil enroulé sont exprimés en fonctions du mètre, de la seconde et de la masse du gramme.

Si i est l'intensité en webers, on a :

$$i = 100\,I = \frac{100hr^2 \operatorname{tang} \theta}{l},$$

ou plus simplement :

$$i = \frac{hr_1^2 \operatorname{tang} \theta}{l_1},$$

si le rayon du cadre r_1 et la longueur du fil l_1 sont exprimés en centimètres, h conservant sa valeur ordinaire

en fonction du mètre. Le rapport $\frac{r_1^2}{l_1}$ est la constante de l'instrument.

354. Pour les galvanomètres ordinaires les déviations ne sont proportionnelles aux intensités du courant que lorsqu'elles ne dépassent pas une certaine limite variant, suivant la forme de l'instrument, de 15 à 30 degrés; au delà la proportion n'existe plus et l'instrument doit être gradué pour donner le rapport des intensités.

Cette graduation s'obtient soit en comparant les déviations produites par un courant, dont on modifie l'intensité, sur l'aiguille du galvanomètre soumis à l'essai et sur celle d'un autre galvanomètre à cadre circulaire ou préalablement gradué et placé dans le même circuit, soit directement en faisant varier dans une proportion déterminée la résistance du circuit et le nombre des éléments de la pile. Les nombres proportionnels aux intensités sont inscrits sur le limbe de l'instrument ou sur un tableau en face des déviations correspondantes exprimées en degrés.

355. On évite ordinairement cette graduation en choisissant le galvanomètre dont on fait usage de façon que la déviation soit faible, ou en intercalant entre les deux bornes une dérivation (Shunt) pour qu'une partie seulement du courant traverse le fil enroulé sur le cadre (n° 200).

Quant à la constante de l'instrument, on peut la déterminer en comparant pour un courant donné la déviation avec celle de l'aiguille d'un galvanomètre absolu placé dans le même circuit. Si θ est la déviation de l'aiguille d'une boussole de tangentes à cadre circulaire de rayon r et dont le fil a une longueur l, l'intensité I est

$$I = \frac{hr^2}{l} \tang \theta;$$

soit α la déviation de l'aiguille du galvanomètre soumis à l'essai, ou plutôt le nombre qui correspond à la déviation de l'aiguille, et M la constante de l'instrument on a

$$I = hM\alpha.$$

De ces deux équations on déduit:

$$M = \frac{r^2}{l} \frac{\text{tang}\,\theta}{\alpha}.$$

L'intensité i du courant qui correspond à une indication γ du même instrument, est :

$$i = \frac{hr^2}{l} \text{tang}\,\theta \times \frac{\gamma}{\alpha},$$

les nombres α et γ ne pouvant être remplacés par les déviations que lorsqu'elles sont faibles.

356. La mesure de l'intensité absolue à l'aide du galvanomètre ne peut donner des résultats exacts que si la composante horizontale h du magnétisme terrestre est connue au moment de l'expérience. Cette valeur, qui est à Paris d'environ 1.920, varie d'un lieu à un autre et n'est pas constante au même point de la terre.

Les variations diurnes et annuelles, qui ne dépassent pas $\frac{1}{1000}$, peuvent en général être négligées, mais il n'en est pas de même de la variation aux divers points de notre globe, le rapport qui existe entre la plus forte et la plus faible intensité pouvant atteindre 2,5 (n° 172).

Les expériences faites en divers points sur l'intensité des courants avec un même galvanomètre ne sont donc rigoureusement comparables que si la composante horizontale du magnétisme terrestre est exactement connue au moment où elles sont faites.

L'électro-dynamomètre est à l'abri des variations du magnétisme terrestre, mais son emploi nécessite la dé-

termination de constantes qui en rendent l'usage peu commode pour les recherches télégraphiques.

357. Enfin la mesure des courants en webers peut aussi s'effectuer à l'aide du voltamètre.

Un courant d'intensité égal à l'unité électro-magnétique absolue, en traversant un voltamètre à eau acidulée, met en liberté pendant 1 seconde $0^{gr},00104$ d'hydrogène (n° 262) ; un courant d'intensité égal à 1 weber dégage donc pendant le même temps $0^{gr},0000104$ d'hydrogène, et dans un voltamètre à base métallique précipite un poids égal à $A \times 0^{gr},0000104$ de métal d'une dissolution saline, dont l'équivalent du métal par rapport à l'hydrogène est A. Si P est l'augmentation de poids de la lame négative pendant t secondes l'intensité du courant en webers est :

$$I = \frac{P}{tA \times 0,0000104} \text{ webers.}$$

Pour un voltamètre à sel de cuivre

$$A = 31,7 \quad \text{et} \quad I = \frac{P}{t \times 0,0003297}.$$

358. *Comparaison entre le weber et les autre unités d'intensité.* — L'unité d'intensité jacobi est celle du courant qui en traversant l'eau acidulée dégage, en une minute, un volume du mélange oxygène et hydrogène égal à 1 centimètre cube à 0° et à la pression de 760 millimètres (n° 144) ou un poids d'hydrogène égal à $0^{gr},00006$. Ce courant en 1 seconde dégagerait un poids d'hydrogène égal à $0^{gr},000001$. L'unité jacobi est donc à $\frac{1}{10,4}$ ou 0,0961 du weber.

Le courant atomique adopté pour unité d'intensité en Allemagne (n° 144), en traversant l'eau acidulée pen-

dant 24 heures, dégage 1 gramme d'hydrogène; pendant 1 seconde il dégagerait $\frac{1}{24 \times 60 \times 60}$, soit $\frac{1}{86400}$ gramme ou $0^{gr},00001156$ d'hydrogène. L'unité atomique est donc égale à $\frac{0,00001156}{0,0000104}$ ou à 1,111 webers.

Enfin, le milli-atome est égal à 0,00111 webers ou à 1,111 milliwebers.

Réciproquement,

$$1 \text{ weber} = \frac{1}{0,0961} \text{ ou } 10,40 \text{ unités jacobi}$$
$$= \frac{1}{1,111} \text{ ou } 0,9 \text{ unités atomiques}$$
$$\frac{}{0,00111} \text{ ou } 900 \text{ milli-atomes.}$$

359. *Mesure des forces électro-motrices.* — La force électromotrice d'une source électrique se déduit de l'intensité du courant qu'elle produit sur un conducteur dont la résistance est connue en appliquant la formule $E = IR$.

L'intensité I peut être mesurée au moyen d'un galvanomètre absolu ou d'un galvanomètre gradué dont la constante est connue; quant à la résistance totale du circuit, R, elle se détermine par une des méthodes indiquées précédemment.

Si l'intensité I est exprimée en webers, la résistance R en ohms, la force électro-motrice E représente des volts.

Lorsque la résistance extérieure est très considérable, on peut négliger celle de la pile, qui généralement ne dépasse pas 8 et 10 ohms par élément, et souvent aussi celle du galvanomètre.

Si, par exemple, on prend un circuit formé de bo-

bines dont la résistance totale soit égale à 10.000 ohms, et une pile de 10 éléments, on aura la force électro-motrice à 0,01 près en appliquant la formule $E = IR$, sans tenir compte de la résistance de la pile.

On peut, d'ailleurs, si la résistance de la pile n'est pas négligeable, mesurer sa force électro-motrice par une double expérience consistant à prendre les intensités I_1 et I_2 du courant obtenu lorsque le circuit est fermé 1° par l'intermédiaire d'une résistance quelconque, 2° par l'intermédiaire de la même résistance augmentée d'une résistance additionnelle connue ρ; la force électromotrice est donnée par la formule (n° 199) :

$$E = \frac{I_1 I_2 \rho}{I_1 - I_2}.$$

Cette méthode ne donne la valeur absolue de E que si les intensités I_1 et I_2 sont elles-mêmes connues en unités absolues.

360. Dans la pratique, on compare ordinairement les éléments qu'on veut mesurer à d'autres éléments dont la force électro-motrice est connue; cette comparaison peut s'effectuer par diverses méthodes qui n'exigent pas l'emploi d'un galvanomètre absolu.

Si deux piles composées de n et de n' éléments, dont les forces électro-motrices sont e et e', introduites dans des circuits de résistances R et R′ donnent des intensités I et I′, on a :

$$ne = IR,$$
$$n'e' = I'R',$$

on en déduit :

$$e' = \frac{nR'}{n'R} \times \frac{I'}{I} \times e.$$

Il suffit de connaître le rapport $\frac{I}{I'}$ des intensités que

peut donner un galvanomètre gradué de forme quelconque.

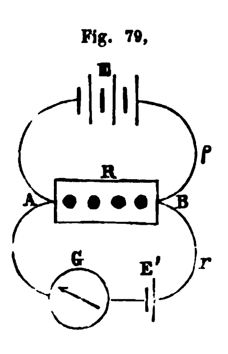
361. Si l'on peut disposer d'un grand nombre d'éléments des deux modèles, le procédé le plus simple consiste à opposer les deux piles dans un même circuit comprenant un galvanomètre, et à faire varier le nombre d'éléments dont elles se composent jusqu'à ce que les deux courants opposés se détruisent, c'est-à-dire jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre reste au zéro. Les forces électro-motrices des deux piles sont alors égales, et si n et n' sont les nombres des éléments de chacune d'elles on a

$$ne = n'e', \quad \text{ou} \quad e' = \frac{n}{n'} \times e.$$

362. Les nombres d'éléments qu'on peut prendre étant forcément limités, l'égalité des deux forces électro-motrices, ne et $n'e'$, ne peut ordinairement être réalisée d'une façon absolue et il passe toujours un faible courant dans le galvanomètre, mais l'expérience peut être modifiée de façon à faire varier d'une façon continue, et dans une proportion connue, la force électro-motrice qui sert de type.

La méthode de Poggendorlf consiste à réunir les pôles des deux piles à comparer, E et E' (*fig.* 79), aux deux extrémités d'un appareil de résistance R, en intercalant un galvanomètre G sur le parcours du conducteur que correspond à la plus faible, E', et à modifier la résistance R, qu'on peut, si l'on veut une très grande approximation, faire varier d'une manière continue à l'aide d'un rhéostat, jusqu'à ce qu'aucun courant ne traverse le galvanomètre G.

Fig. 79.



Désignons par ρ la résistance AEB, par r la résistance AGE'B, par R celle du rhéostat, enfin par E et E' les forces électro-motrices des deux piles ; le courant dû à la pile E, qui traverse le galvanomètre G, est

$$\frac{E}{\rho r + \rho R + rR} \times R,$$

et le courant dû à la pile E', qui traverse en sens contraire le même galvanomètre

$$\frac{E'}{\rho r + \rho R + rR} \times (R + r).$$

On a donc lorsque l'aiguille du galvanomètre reste en repos

$$ER = E'(R + r),$$

d'où l'on déduit :

$$E' = \frac{R}{R + r} \times E,$$

ou, si les deux piles comprennent n et n' éléments dont les forces électro-motrices sont e et e' :

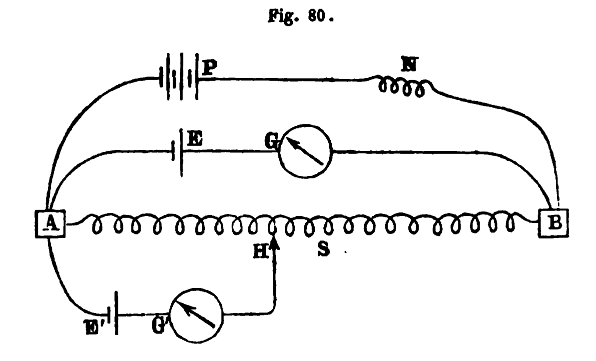
$$e' = \frac{R}{R + r} \times \frac{ne}{n'}.$$

363. Dans la méthode de Poggendorf la pile E' n'est traversée par aucun courant ; mais il n'en est pas de même pour la pile E et, si cette dernière subit des effets de polarisation, la comparaison des deux forces électro-motrices est soumise à des causes d'erreurs. M. Latimer Clarck a modifié le mode d'expérimentation en introduisant une pile supplémentaire qu'on choisit à courant constant ; il a donné à son appareil le nom de *potentiomètre*.

P (*fig.* 80) est la pile à courant constant dont les deux pôles sont en communication avec deux blocs métalliques

A et B par l'intermédiaire d'un rhéostat N ; E et E' sont les deux piles ou les deux éléments à comparer ; la pre-

Fig. 80.



mière est en communication avec les blocs A et B, un galvanomètre G se trouvant dans le circuit; la seconde est en relation avec le bloc A, d'une part et de l'autre, par l'intermédiaire d'un second galvanomètre G', avec une pointe métallique H. Enfin les deux blocs A et B sont reliés entre eux par l'intermédiaire d'une spirale métallique S, dont un point quelconque peut être touché à l'aide de la pointe H; cette spirale est, à cet effet, fixée sur un cylindre de bois mobile autour de son axe, et est disposée de façon à rester toujours au moyen de frotteurs en communication avec A et B.

On commence par régler le rhéostat N de façon que, la pointe H étant isolée, le galvanomètre G ne soit parcouru par aucun courant. La différence de potentiel aux points A et B est alors égale à la force électromotrice de la pile E.

On promène alors la pointe H sur la spirale S, qu'on fait tourner s'il est nécessaire, jusqu'à ce que le galvanomètre G' n'accuse aucune trace de courant; à ce momoment, l'aiguille du galvanomètre G doit avoir la même

déviation que lorsque la pointe H est éloignée de la spirale, aussi l'expérience peut-elle se faire avec le seul galvanomètre G.

Lorsque cette condition est remplie, la force électromotrice de la pile E' est égale à la différence de potentiel des points A et H, qui elle-même est égale à la force électro-motrice E multipliée par le rapport de la résistance de la partie du fil héliçoïdal comprise entre A et H à la résistance totale de A en B.

Dans l'appareil de M. Clark le conducteur S forme 100 tours ; si n est le nombre de tours compris entre A et H, on a la relation :

$$E' = E \times \frac{n}{100}.$$

Le nombre n peut d'ailleurs, représenter un nombre fractionnaire correspondant à un nombre de tours augmenté d'une fraction.

La pile la plus faible doit toujours être placée en E' et la pile la plus forte en E.

On peut obtenir à l'aide de cet instrument une approximation d'environ $\frac{1}{1000}$ de Volt ou d'élément Daniell.

364. On peut aussi comparer les forces électro-motrices de deux piles au moyen d'un électromètre gradué, d'un électromètre à quadrans par exemple (n° 69) dont deux secteurs opposés sont mis successivement en communication avec les pôles positifs de chacune des deux piles, les autres secteurs communiquant avec les pôles négatifs. Le rapport des différences de potentiels accusées par l'instrument donne celui des forces électromotrices.

365. Enfin la mesure des forces électro-motrices peut s'effectuer à l'aide d'un condensateur.

Si l'on charge avec une pile, dont on fait communiquer un des pôles avec le sol, un condensateur dont la capacité S soit connue en unités électro-magnétiques, on a, en représentant par E la force électro-motrice et par Q la charge que prend le condensateur,

$$Q = ES.$$

Cette charge peut être mesurée en unités électro-magnétiques en opérant la décharge à travers le fil d'un galvanomètre et en notant l'angle décrit par l'aiguille (n° 261) ; on en déduit le rapport $\frac{Q}{S} = E$. Cette méthode ne donnerait pas la valeur absolue d'une force électro-motrice avec une exactitude suffisante, mais elle peut être employée avec succès pour comparer les forces électro-motrices de deux piles ou de deux éléments. On charge successivement avec les deux piles un même condensateur, puis on opère la décharge à travers un galvanomètre et on observe la déviation de l'aiguille.

Si α et α' sont les angles qu'elle décrit, on a entre les deux charges $Q = ES$ et $Q' = E'S$ la relation

$$\frac{Q'}{Q} = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha'}{\sin \frac{1}{2} \alpha},$$

et par suite :

$$E' = \frac{\sin \frac{1}{2} \alpha'}{\sin \frac{1}{2} \alpha} \times E,$$

ou plus simplement, si les angles α et α' sont assez petits :

$$E' = \frac{\alpha'}{\alpha} E.$$

366. ***Éléments types.*** — La mesure des forces électro-motrices des piles se fait ordinairement, dans la pratique, par comparaison avec celle d'éléments voltaïques pour lesquels la force électro-motrice est connue exactement et qui sont faciles à reproduire. Il y a donc intérêt à avoir des éléments types ayant une force électro-motrice constante et bien déterminée.

L'élément Daniell est fréquemment employé à cet effet, mais sa force électro-motrice varie de 5 pour 100 et même plus sans cause apparente et l'on a été conduit à chercher d'autres combinaisons voltaïques.

M. Latimer Clark après de nombreux essais est parvenu à réaliser un élément dont la force électro-motrice est très sensiblement la même, au moins pendant un instant, et qui peut servir de type.

Cet élément est formé de mercure pur sur lequel on dépose une pâte obtenue en faisant bouillir du sulfate de mercure dans du sulfate de zinc et d'une plaque de zinc qui repose sur cette pâte. Un fil métallique soudé à cette plaque constitue le pôle négatif de l'élément; quant au pôle positif, il est formé par un fil de platine descendant dans le mercure à travers un petit tube de verre (*).

La pâte de sulfate de mercure s'obtient en faisant dissoudre du sulfate de zinc à saturation dans de l'eau distillée bouillante, puis en mêlant, après refroidissement, la solution séparée des cristaux avec du sulfate de protoxyde de mercure; ce mélange donne une pâte épaisse qu'on fait bouillir pour en chasser l'air.

Le sulfate de mercure se trouve dans le commerce; on peut d'ailleurs le préparer en dissolvant du mercure pur en excès dans de l'acide sulfurique chauffé au-dessous de

(*) *Journal de physique*, 1873.

son point d'ébullition. Le sel qui est une poudre blanche presque insoluble doit être bien lavé dans de l'eau distillée ; on doit prendre soin de l'avoir pur de sulfate de peroxyde de mercure dont la présence se révèle par la solution jaune que produit l'addition de l'eau.

La force électro-motrice de ces éléments est égale à 1,45676 volts ; elle est remarquablement uniforme et constante si l'on a soin de ne pas la laisser s'affaiblir par un travail continu. Ces éléments conviennent donc comme types pour la comparaison des forces électromotrices par les procédés qui ne nécessitent pas le passage d'un courant continu à travers l'élément. M. Latimer Clark a conclu d'une longue série d'expériences que leur force électromotrice ne varie pas de $\frac{1}{1000}$. Ce chiffre est peut-être un peu exagéré ; des expériences faites en France par M. Pollet ont donné des différences qui atteignent $\frac{1}{100}$ de volt. En ce qui concerne l'influence de la chaleur, on peut admettre que la force électro-motrice décroît seulement de 0,06 pour 100 pour chaque degré d'élévation de la température.

367. *Force électro-motrice des éléments les plus employés.* — Le tableau suivant donne en volts la force électro-motrice des éléments les plus habituellement employés dans la pratique.

Élément Daniell ordinaire (zinc, sulfate de cuivre, cuivre). . . .	1,079
— Daniell (zinc, acide sulfurique, azotate de cuivre, cuivre).	1,000
— Marié-Davy (zinc, charbon, sulfate de mercure). . . .	1,524
— Leclanché (zinc, charbon, sel ammoniac et peroxyde de manganèse).	1,481
Élément Bunsen (zinc, charbon, acide sulfurique, acide azotique fumant).	1,964
Élément Bunsen (zinc, charbon, acide sulfurique, acide azotique ordinaire).	1,888

Élément au bichromate de potasse (zinc, charbon, bichromate de potasse, acide sulfurique)	2,028
Élément Groze (zinc, platine, acide sulfurique, acide azotique fumant)	1,956
Élément Wollaston (zinc, acide sulfurique, cuivre)	0,890
— Smée (zinc, acide sulfurique, platine)	1,104
— à chlorure d'argent	1,210
— à chlorure de plomb	0,587
— type de Clark (décrit plus haut)	1,456

La force électro-motrice de la plupart de ces éléments décroît lorsqu'ils sont en activité; pour les éléments Wollaston et Smée notamment, elle tombe de 50 p. 100, ou même plus, lorsqu'ils sont placés dans un court circuit, par suite du dépôt d'hydrogène sur la lame négative. Pour les éléments Bunsen et Grove, la décroissance de la force électro-motrice, beaucoup moins rapide d'ailleurs, tient surtout à l'épuisement de l'acide azotique qui se consomme assez rapidement.

Quant à la pile Daniell, sa force électro-motrice est très sensiblement constante pendant tout le temps que le sulfate de cuivre n'est pas complètement réduit.

368. — La résistance des éléments dépend de leurs dimensions, de leur forme et de leur composition.

Pour les éléments Daniell, Leclanché et Marié Davy, de dimensions ordinaires (2 décimètres de hauteur), elle est d'environ 10 ohms; elle est réduite de moitié ou des trois quarts pour les éléments de grande dimension.

Pour les éléments Bunsen et Grove, de 2 décimètres de hauteur, la résistance est inférieure à 1 ohm et dépend du degré de concentration des acides.

Quantité et capacité électro-statique.

369. *Unité de quantité.* — L'unité de quantité, qui se déduit de l'équation $Q = It$ (n° 261), est la quantité qui,

pendant une seconde, traverse la section d'un conducteur parcouru par un courant constant ayant une intensité égale à un weber.

Le weber étant égal à $\frac{1}{100}$ de l'unité absolue d'intensité, l'unité de quantité de l'association britannique est égale à $\frac{1}{100}$ de l'unité absolue de quantité (mètre, seconde, masse du gramme) que nous avons représentée par Q_m. Nous désignerons cette unité par le symbole Θ; on a donc

$$\Theta = \frac{Q_m}{100}.$$

On avait d'abord donné le nom de Farad à cette unité, mais l'usage paraît avoir prévalu d'appliquer ce nom à l'unité de capacité électro-statique.

En traversant une dissolution saline, l'unité de quantité Θ précipite, comme un weber pendant une seconde, un poids égal à $A \times 0{,}0000104$ grammes d'un métal dont l'équivalent chimique est A.

On a vu que l'unité électro-magnétique absolue est égale à l'unité électro-statique multipliée par une vitesse identique à celle de la lumière ou à environ 300.000.000 mètres par seconde; l'unité de l'association britannique, Θ, est donc égale à 3.000.000 unités électro-statiques absolues. Concentrée en un point, l'unité Θ repousserait une quantité égale d'électricité de même nom située à une distance l avec une force absolue qui aurait pour valeur :

$$f = \frac{(3.000.000)^2}{l^2};$$

en faisant l égal à 1.000 mètres, on aurait $f = 9{,}000{,}000$

d'unités absolues de force, ou environ 1.000 kilogrammes.

370. — *Mesure de la quantité.* — On peut mesurer la quantité d'électricité dont un conducteur est chargé, comme il a été dit au n° 261, en lui faisant traverser le fil d'un galvanomètre, et en observant l'angle décrit par l'aiguille. Cette quantité est donnée en unités absolues, si le galvanomètre est une boussole de tangentes, par la formule

$$Q = \frac{2 \sin \frac{1}{2} \alpha \times thr^2}{l\pi}.$$

En unités A de l'association la même quantité est représentée par le nombre

$$Q_1 = 100Q = \frac{100 \times 2 \sin \frac{1}{2} \alpha + thr^2}{l\pi},$$

r et *l* représentant des mètres, ou par la formule précédente, si *r* et *l* sont exprimés en centimètres, *h* conservant sa valeur en fonction du mètre, environ 1,9.

Lorsque la décharge à travers le fil du galvanomètre produit une oscillation trop grande de l'aiguille, on réduit le nombre de tours du fil. On peut aussi diminuer la sensibilité du galvanomètre par l'emploi d'un fil de dérivation, mais le partage du fluide entre deux conducteurs pendant une décharge ne s'effectue pas toujours dans la proportion de leurs résistances, surtout si la charge est considérable.

Cette méthode ne donne pas la mesure exacte de la masse totale d'électricité accumulée sur un condensateur, car le fluide, qui pénètre peu à peu dans le di-électrique ou polarise ses molécules, ne s'écoule pas instan-

tanément ; néanmoins, elle représente la plus grande partie de la charge et, dans la pratique, on se contente de l'approximation qu'elle fournit.

371. — *Unité de capacité électro-statique.* — L'unité de capacité électro-statique de l'association britannique, à laquelle on a donné le nom de Farad, est celle d'un condensateur qui prendrait une charge égale à l'unité de quantité, Θ, lorsque la différence de potentiel des armatures est égale à un volt, Δ. On représente cette unité par la lettre majuscule grecque Φ.

On a, entre la capacité d'un condensateur, S, sa charge, Q, et la différence de potentiel, E, des deux armatures, la relation

$$S = \frac{Q}{E};$$

Si E est égal à un volt Δ, Q à l'unité de charge de l'association britannique Θ, la capacité égale à un farad, est représentée par le symbole

$$\Phi = \frac{\Theta}{\Delta}.$$

L'unité de quantité Θ étant égale à $\frac{1}{100}$ de l'unité absolue Q_m, le volt Δ à l'unité absolue de force électomotrice E_m multipliée par 10^8, on a :

$$\Phi = \frac{Q_m}{E_m} \times \frac{1}{10^7} = \frac{S_m}{10^7}.$$

Ainsi, le farad est égal à l'unité absolue électro-magnétique de capacité S_m divisée par 10^7.

Comme multiple, on a adopté mégafarad, égal à un million de farads (1.000.000 Φ), et comme sous-mul-

tiple le microfarad égal à un millionième de farad $\left(\frac{\Phi}{1.000.000}\right)$; on représente ce sous-multiple par la lettre minuscule grecque φ, on a donc :

$$\varphi = \frac{\Phi}{10^6} = \frac{\Theta}{10^6 \Delta}.$$

372. Dans le système électrostatique, la capacité d'un condensateur est exprimée par une longueur (n° 53); dans le système électromagnétique, la même capacité est représentée par la même longueur divisée par le carré du rapport entre les unités électro-magnétiques et les unités électrostatiques de quantité (n° 278), rapport qui est, ainsi qu'on l'a vu, une vitesse comprise entre 282.000.000 et 310.000.000 mètres par seconde, et pour laquelle nous admettons le chiffre rond de 300.000.000.

Si donc l est la capacité d'un condensateur dans le système électrostatique, et v le rapport des unités électromagnétiques de quantité aux unités électrostatiques, la capacité dans le système électromagnétique absolu est $\frac{l}{v^2}$, l et v devant être exprimés en unités de longueur de même espèce.

Un farad, Φ, étant égal à l'unité absolue de capacité (mètre, seconde, masse du gramme) divisée par 10^7, la capacité $\frac{l}{v^2}$ représente $\frac{10^7 l}{v^2}$ ou environ $\frac{l}{9 \times 10^9}$ farads, ou $\frac{l}{9.000}$ microfarads.

373. La capacité électrostatique d'une sphère de rayon R qui, dans le système électrostatique, est exprimée par le même nombre que R, est, dans le système élec-

tro-magnétique, $\frac{R}{9\times10^9}$ farads, ou $\frac{R}{9.000}$ microfarads.

Le rayon R devrait être égal à 9.000 mètres pour que la sphère eût une capacité égale à un microfarad.

La capacité d'un condensateur formé de deux sphères concentriques (n° 55) de rayons R et r, séparées par une couche d'air, est $\frac{Rr}{R-r} \times \frac{1}{9.000}$ microfarads.

Celle d'un condensateur plan de surface égale à A mètres carrés, et dont la distance des armatures est d (n° 59), a pour valeur $\frac{A}{4\pi d} \times \frac{1}{9.000}$ microfarads, en supposant les deux plaques métalliques séparées par une couche d'air, et $\frac{Ac}{4\pi d} \times \frac{1}{9.000}$, si c est le pouvoir spécifique inducteur par rapport à l'air de la matière isolante qui sépare les deux plaques du condensateur.

374. Enfin pour un condensateur cylindrique tel qu'un câble sous-marin, dont le conducteur aurait un rayon r et l'enveloppe isolante un rayon extérieur R, la capacité électrostatique correspondant à une longueur l est :

$$\frac{lc \times 0.434}{2 \log \frac{R}{r}} \times \frac{1}{9.000} \text{ microfarads.}$$

Si nous prenons pour exemple, comme au n° 64, le câble transatlantique français posé en 1868 de Brest à Saint-Pierre, pour lequel les diamètres du fil recouvert de gutta-percha et du fil nu sont $5^{mm},96$ et $2^{mm},13$, on a pour la capacité électrostatique par kilomètre de longueur, en admettant 3 pour le pouvoir spécifique inducteur, c, de la gutta-percha par rapport à l'air :

$$\frac{1.523}{9.000} = 0{,}17 \text{ microfarads.}$$

La capacité par mille marin, de 1.852 mètres, est donc $0,17 \times 1,852$ ou 0,315 microfarads.

L'expérience a donné, en réalité, pour cette capacité par mille 0,429; la différence tient à ce que nous avons admis au n° 64, pour la capacité inductive de la gutta-percha par rapport à l'air, le nombre 3, qui est trop faible; la valeur de cette capacité, déduite des essais faits sur les câbles sous-marins récemment immergés atteint en général le chiffre 4.

Pour le câble sous-marin immergé en 1859 entre la France et l'Algérie, le cahier des charges portait pour la capacité électrostatique maximum 0,40 de microfarad par mille marin. On a donc l'équation :

$$\frac{c \times 1.852 \times 0,434}{2 \log \frac{R}{r}} \times \frac{1}{9.000} = 0,40;$$

on a vu, n° 347, que pour ce câble

$$\log \frac{R}{r} = \log \frac{D}{d} = 0,5344;$$

en faisant la substitution, on a

$$\frac{c \times 1.852 \times 0.453}{2 \times 0,5344} \times \frac{1}{9.000} = 0,40,$$

d'où l'on déduit :

$$c = \frac{0,40}{0,082} = 4,8.$$

Ce chiffre n'était pas atteint; la valeur de c ne dépassait pas, en réalité, 3,8.

375. On admet pour les capacités inductives moyennes

des matières employées à l'isolement des câbles sous-marins lorsqu'elles sont de bonnes qualités :

Pour le caoutchouc.	2,8
— le caoutchouc vulcanisé Hooper. . . .	3,3
— la gutta-percha de Smith.	3,4
— la gutta-percha simple.	4,2

376. ***Produit de la résistance par la conductibilité de l'enveloppe isolante d'un conducteur sous-marin.*** — Si, après avoir électrisé le conducteur d'un câble isolé à son extrémité, on le met en communication avec la terre sans intervalle sensible, la quantité d'électricité qui s'écoule est égale à la charge ; mais si les deux opérations sont séparées par un certain intervalle de temps, une partie du fluide passe à travers le di-électrique et le courant de décharge n'est qu'une fraction du courant de charge, fraction qui dépend de la résistance spécifique de l'enveloppe isolante, de la capacité électrostatique du câble et est indépendante de la longueur essayée.

Les potentiels au moment de la charge du conducteur et au bout d'un temps égal à t secondes étant V et V_1, on a la relation (n°s 122 et 326) :

$$RS = \frac{t}{\text{log nép.} \frac{V}{V_1}} = \frac{t}{2{,}7188 \log \frac{V}{V_1}}.$$

R devant être exprimé en ohms et S en farads, ou R en megohms et S en microfarads.

Le rapport des potentiels $\frac{V}{V_1}$ peut se mesurer soit en observant la marche d'un électromètre en relation avec le fil conducteur, soit en faisant passer la décharge à travers un galvanomètre immédiatement après la charge, puis en rechargeant le conducteur, en opérant la dé-

charge après un intervalle de temps déterminé et en observant de nouveau la marche de l'aiguille.

En désignant par Q et Q_1 les décharges observées, lorsqu'on emploie la dernière méthode, et par t l'intervalle de temps, on a :

$$RS = \frac{t}{2,7188 \log \frac{Q}{Q_1}}.$$

Si t est le temps qu'emploie le potentiel ou la charge à décroître de moitié,

$$\log \frac{V}{V_1} = \log \frac{Q}{Q_1} = \log 2 = 0,301$$

et, par suite :

$$RS = \frac{t}{0,836}, \quad \text{ou} \quad t = 0,836 \times RS.$$

Pour le câble immergé en 1869 entre la France et l'Algérie, on devait avoir par mille marin, après la pose, R=600 megohms et S=0,40 microfarads, ce qui conduit à t=200 secondes environ, ou 3 minutes 1/3 (*).

377. *Mesure directe de la capacité électrostatique.* — Ainsi que nous l'avons dit, la charge électrique d'un condensateur est un phénomène complexe. Au moment du contact de l'une des armatures avec une source électrique, il se produit une charge instantanée qui, suivant M. Gaugain, est indépendante de la nature du corps isolant, tandis que, d'après des expériences récentes faites en Angleterre, elle est variable avec la nature du diélectrique, et a sa plus faible valeur lorsque les deux

(*) Nous avons indiqué, au n° 123, 21 minutes pour le temps qu'emploient certains conducteurs sous-marins à perdre la moitié de leur charge. Ce temps, qui paraît avoir été observé sur le premier câble transatlantique, est notablement supérieur à ce que l'on obtient sur la plupart des lignes télégraphiques sous-marines.

armatures sont séparées par le vide; après ce premier effet, la charge s'accroît peu à peu suivant des lois très diverses qui dépendent de la nature et de la qualité de la matière isolante, cet accroissement étant à peu près nul lorsque cette matière est un gaz. L'expérience indiquée plus haut pour le calcul du produit RS ne peut donc donner de résultats absolument précis.

Dans les mesures de capacité électrostatique, il importe de spécifier les conditions dans lesquelles doivent être faits les essais pour que les expériences soient comparables. On charge ordinairement pendant quinze à vingt secondes le conducteur des câbles, puis, immédiatement après, on opère la décharge en lui faisant traverser le fil d'un galvanomètre et l'on mesure la grandeur de cette décharge.

La capacité est donnée par la formule du n° 269

$$S = \frac{2t \sin \frac{1}{2} \alpha}{R\pi \tang \theta};$$

Si la résistance R est exprimée en ohms, la capacité S est mesurée en farads; si R est exprimée en mégohms, S est mesurée en microfarads.

On peut, d'ailleurs, faire varier le nombre des éléments qui servent à obtenir les déviations α et θ, de façon que ces angles soient faibles et faciles à observer. Si l'angle α est obtenu avec n éléments et l'angle θ avec n' éléments, la capacité est :

$$S = \frac{2n't \sin \frac{1}{2} \alpha}{nR\pi \tang \theta}.$$

378. La mesure exacte de la capacité électrostatique, par la méthode qui vient d'être indiquée, est toujours très délicate, car elle exige la mesure parfaitement exacte

de la durée d'oscillation d'une aiguille aimantée sous l'influence du magnétisme terrestre; or, la résistance de l'air, les frottements de l'aiguille sur son pivot ou la torsion du fil de suspension introduisent des causes d'erreur dont il est difficile de tenir compte dans la pratique ordinaire.

Il est préférable de mesurer la capacité des condensateurs, et notamment celle des câbles télégraphiques, par comparaison avec celles de condensateurs préalablement étalonnés.

379. *Étalons de capacité.* — On peut, en faisant varier l'étendue d'un condensateur, et en mesurant sa capacité électrostatique par la méthode précédente, arriver par tâtonnements à lui donner une capacité déterminée et parfaitement connue.

On forme ces condensateurs (n° 60) en superposant alternativement des feuilles d'étain et des feuilles de papier, et en mettant en communication entre elles les feuilles métalliques de rang pair et celles de rang impair. Le nombre total des feuilles est toujours impair pour que les deux extrêmes fassent partie de la série qu'on fait communiquer avec la terre, celle de l'autre série étant mise en relation avec la source électrique. La charge a lieu sur les deux faces de chaque lame.

On obtient ainsi des condensateurs qui, sous un petit volume, ont une capacité électrostatique considérable. On a par exemple des condensateurs d'une capacité égale à 1 microfarad, formés de 35 à 40 feuilles d'étain superposées, séparées par des doubles feuilles de papier de soie et qui sont contenues dans des boîtes d'environ 20 centimètres de longueur, 13 de largeur et 10 centimètres de hauteur.

Lorsqu'on a à sa disposition un condensateur étalonné,

on peut facilement en établir d'autres de capacité égale, puis des multiples ou sous-multiples de façon à former une série complète, en employant une des méthodes indiquées ci-après pour mesurer la capacité électrostatique.

380. *Mesure indirecte de la capacité électrostatique.* — La mesure de la capacité électrostatique d'un condensateur, lorsqu'on a à sa disposition des condensateurs étalonnés, peut s'effectuer par diverses méthodes dont plusieurs ont été indiquées au n° 80.

Le procédé le plus simple consiste à charger le condensateur soumis à l'expérience à l'aide d'une pile, puis à le décharger immédiatement, en faisant passer le courant à travers le fil d'un galvanomètre, et à observer l'angle décrit par l'aiguille ; on fait ensuite la même opération avec des condensateurs étalonnés dont on fait varier le nombre ou l'étendue jusqu'à ce que la déviation de l'aiguille soit la même. Les deux capacités sont alors égales.

Si cette condition ne peut être remplie d'une façon absolue, et si α et α' sont les deux angles décrits par l'aiguille, les capacités S et S' sont liées par la relation

$$S : S' :: \sin \frac{1}{2} \alpha : \sin \frac{1}{2} \alpha',$$

ou, si les angles α et α' sont assez faibles

$$S : S' :: \alpha : \alpha'$$

ou enfin, si l'on prend les nombres différents d'éléments, n et n', pour les deux opérations :

$$S : S' :: \frac{\alpha}{n} : \frac{\alpha'}{n'}.$$

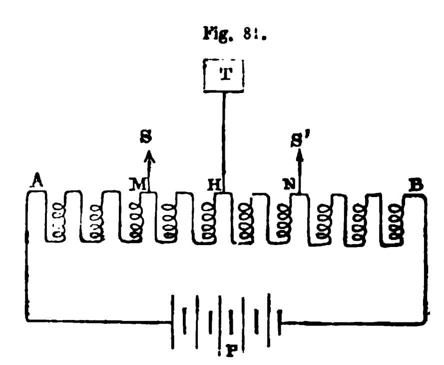
Cette formule permet de mesurer une capacité électro-

statique quelconque avec une étendue limitée de condensateurs étalons.

381. — On peut aussi se servir du galvanomètre différentiel en mettant les extrémités des deux fils de l'instrument en communication, d'une part avec la même pile, et, de l'autre, avec les deux condensateurs, de façon que les courants de charge circulent en sens contraire autour de l'aiguille. Cette dernière reste au repos lorsque les deux condensateurs ont une égale capacité.

382. — La méthode suivante (*) n'exige qu'un seul condensateur étalonné, pourvu qu'on ait une série de bobines de résistances égales. Les deux pôles de la pile P (*fig.* 81) sont reliés par une série de bobines égales intercalées entre A et B, 10 par exemple, le milieu H étant rélié à la terre en T. Le potentiel décroît d'une manière régulière de A et B, en passant par zéro au point H; il est positif de A à H, et négatif de H à B.

Fig. 81.



On charge les deux condensateurs en mettant une de leurs armatures en communication avec la terre, et la seconde avec un point M pour le premier condensateur et un point N pour le second. Le potentiel de la

(*) *Electricity and magnetism*, par M. Jenkin.

charge du premier est proportionnel au nombre n de bobines comprises entre H et M, celui du second est de signe contraire et proportionnel au nombre n' de bobines comprises entre H et N ; quant aux deux charges, elles sont représentées par les produits des capacités S et S′ par les nombres n et n', ou par nS et n'S′ ; si elles sont égales, on a :

$$nS = n'S' \quad \text{et} \quad S' = \frac{n}{n'} S.$$

Pour reconnaître si les deux charges sont égales, il suffit de mettre en communication les deux armatures électrisées, l'une positivement et l'autre négativement, et de voir s'il reste du fluide libre, ce dont on peut s'assurer soit à l'aide d'un électromètre, soit à l'aide d'un galvanomètre.

En faisant varier les points de communication des deux condensateurs avec les bobines comprises entre A et B, on arrive aisément à trouver deux positions pour lesquelles la charge résiduelle est nulle, ou a sa plus faible valeur.

Les chances d'erreur sont d'autant moindres que les bobines employées sont plus résistantes et plus nombreuses.

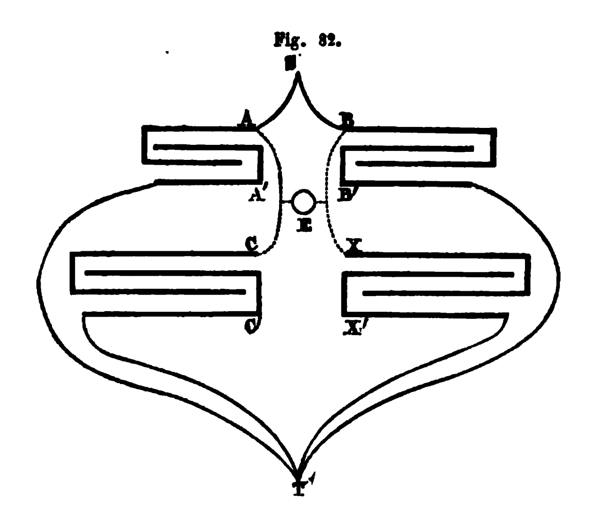
383. — On peut employer une méthode analogue à celle du pont de Wheatstone, et déjà décrite au n° 80.

On charge simultanément deux condensateurs AA′ et BB′ (*fig.* 82), dont on connaît le rapport des capacités, en les mettant en communication avec une source S, puis on enlève la source et on fait communiquer l'armature électrisée de AA′ avec celle d'un condensateur étalonné CC′, à capacité variable, et l'armature B avec celle du condensateur à mesurer XX′.

Si les potentiels des deux doubles condensateurs A et

C, B et X sont les mêmes, on a entre leurs capacités a,

Fig. 82.



c, b et x la relation :

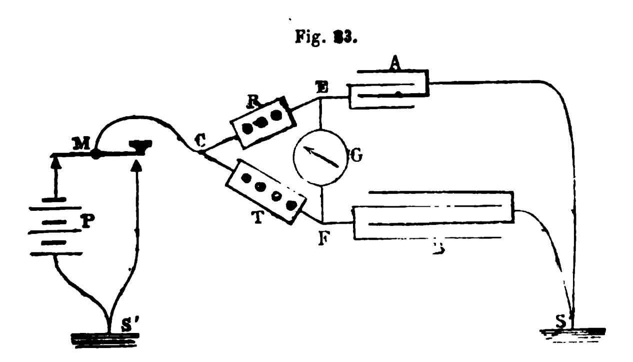
$$x = \frac{cb}{a}.$$

On reconnaît que ces potentiels sont égaux, soit en faisant communiquer les armatures par l'intermédiaire d'un galvanomètre très sensible, dont l'aiguille reste alors en repos, soit en les mettant en communication avec les bornes d'un électromètre à quadrans.

384. — Enfin, M. de Sauty a imaginé une méthode qui consiste à employer un seul condensateur, outre celui qui est soumis à l'essai, et deux appareils de résistance disposés comme dans le pont de Wheatstone. A et B (*fig.* 83) sont les deux condensateurs dont une armature est en communication avec la terre en S, tandis que l'autre est, pour chacun d'eux, reliée à un appareil de résistance R et T. Ces deux derniers appareils sont, d'autre part, en communication, par un fil CM, avec un

P manipulateur qui permet d'envoyer le courant d'une pile , ou d'opérer la décharge en S'.

Fig. 83.



Un galvanomètre très sensible est installé en G sur le trajet d'un fil qui réunit les deux sommets E et F du pont.

Pour faire l'expérience, il suffit d'envoyer le courant et d'opérer la décharge des condensateurs, à l'aide du manipulateur M. Lorsqu'aucun courant ne traverse le galvanomètre G, on a, entre les résistances R et T, et les capacités A et B des condensateurs, la relation :

$$AR = BT, \quad \text{ou} \quad \frac{A}{B} = \frac{T}{R}.$$

Si les deux condensateurs A et B sont invariables, il suffit, pour avoir le rapport $\frac{A}{B}$, de modifier l'une des résistances R ou T, jusqu'à ce que l'aiguille du galvanomètre G n'indique aucune trace du courant pendant la charge ou la décharge.

385. On peut démontrer de plusieurs manières l'exactitude de la relation $AR = BT$, lorsque, pendant la charge ou la décharge, aucun courant ne traverse le conducteur EF.

La charge des condensateurs A et B lorsqu'on les met en communication avec le pôle de la pile, ou leur décharge quand on les fait communiquer avec la terre n'est pas instantanée ; elle dure un certain temps qui dépend de la résistance plus ou moins grande des conducteurs R et T.

Supposons, un instant, qu'on enlève la communication EF, et désignons par V le potentiel au point C, qui est relié directement avec le pôle de la pile, et par V' celui de l'armature d'un des condensateurs, A, à un instant donné.

L'intensité du courant, pendant un intervalle de temps infiniment court, est

$$I = \frac{V - V'}{R},$$

et la charge que prend le condensateur pendant cet intervalle de temps, dt, est

$$Q = I dt = \frac{V - V'}{R} dt.$$

Cette quantité d'électricité produit un accroissement dV' du potentiel électrique de l'armature du condensateur A, et la quantité Q d'électricité qu'il prend est représentée par le produit de sa capacité A par dV',

$$Q = A dV'.$$

En égalant les deux valeurs de Q on a :

$$\frac{V - V'}{R} dt = A dV',$$

ou

$$dt = AR \frac{dV'}{V - V'}.$$

dont l'intégrale générale est :

$$\frac{V'}{V - V'} = e^{-\frac{t}{AR}} + C.$$

En faisant $V' = 0$ pour $t = 0$, on trouve pour la constante C la valeur -1, qui substituée dans l'équation conduit à la formule :

$$\frac{V}{V - V'} = e^{-\frac{t}{AR}},$$

Pour le second condensateur, on a de même :

$$\frac{V}{V - V''} = e^{-\frac{t}{BT}}.$$

Si, lorsque les deux points E et F sont réunis, on n'observe aucune trace de courant dans le galvanomètre G, on en conclut que les potentiels V' et V'' sont égaux, et que, par conséquent, on a :

$$AR = BT.$$

Capacité électrostatique ou inductive spécifique absolue.

386. Nous avons jusqu'ici considéré la capacité électrostatique ou inductive spécifique des matières isolantes en la rapportant à celle de l'air. Les électriciens ont été conduits, pour l'étude des câbles sous-marins, à ramener la mesure de cette grandeur au système absolu en adoptant pour unité de capacité spécifique celle de la substance, réelle ou imaginaire, qui, en séparant deux surfaces planes parallèles égales à l'unité et distantes de l'unité de longueur, produirait l'unité de capacité électrostatique.

387. *Capacité spécifique absolue dans le système électrostatique.* — Désignons par c la capacité spécifique d'une substance par rapport à l'air ; la capacité S d'un condensateur formé de deux plaques parallèles d'étendue

A, et situées à une distance d est, dans le système électrostatique (nos 59 et 61) :

$$S = \frac{Ac}{4\pi d}.$$

Si A est égal à l'unité de surface et d à l'unité de longueur, la capacité, qui devient

$$\frac{c}{4\pi},$$

représente la capacité électrostatique, ou inductive spécifique absolue de la substance. C'est un coefficient constant pour chaque matière, qui est indépendant des unités fondamentales adoptées, puisque c est lui-même un nombre abstrait.

Pour l'air et les gaz à différentes pressions, c a sensiblement la même valeur, qu'on prend habituellement pour unité; leur capacité spécifique absolue est donc $\frac{1}{4\pi}$ ou 0,079.

Pour la gutta-percha, on a en moyenne $c = 4$; la capacité spécifique absolue de cette matière est donc environ $\frac{4}{4\pi}$ ou 0,317.

La matière qui aurait une capacité spécifique égale à l'unité serait celle pour laquelle on aurait :

$$c = 4\pi = 12,5664.$$

388. *Capacité spécifique dans le système électromagnétique.* — Dans le système électromagnétique, la capacité d'un condensateur formé de deux plaques parallèles d'étendue A, situées à une distance d et séparées par un corps dont le pouvoir inducteur par rapport à l'air a pour valeur c, est

$$S = \frac{Ac}{4\pi d} \times \frac{1}{v^2},$$

v étant la vitesse qui représente le rapport entre les unités électromagnétiques et les unités électrostatiques, égale à environ 300.000.000 mètres par seconde.

En faisant $A = 1$ et $d = 1$ dans la formule précédente, la valeur de S devient

$$\frac{c}{4\pi} \times \frac{1}{v^2},$$

et représente en unités électro-magnétiques la capacité absolue de la matière isolante. Sa valeur dépend des unités fondamentales adoptées pour la mesure des longueurs et du temps, qui entrent dans la valeur de v.

Les dimensions de cette grandeur sont inverses de celles du carré d'une vitesse et sont représentées par $\frac{T^2}{L^2}$.

Si l'on adopte pour unités fondamentales le mètre et la seconde, le nombre qui représente la capacité spécifique de l'air est

$$\frac{1}{4\pi} \times \frac{1}{(300.000.000)^2},$$

ou environ

$$\frac{1}{108 \times 10^{16}}.$$

389. L'unité absolue de capacité électrostatique (S_m) est égale à 10^7 farads, ou à 10^{13} microfarads (371). La capacité spécifique, qui est c par rapport à l'air, est donc, en la rapportant au mètre cube, égale à

$$\frac{c}{4\pi} \times \frac{10^7}{v^2} \text{ farads},$$

ou

$$\frac{c}{4\pi} \times \frac{10^{13}}{v^2} \text{ microfarads}.$$

390. Supposons qu'on rapporte la capacité inductive à un cube dont le côté aurait a mètres ; la capacité c

sera, en microfarads

$$\frac{ac}{4\pi} \times \frac{10^{13}}{v^2} \text{ microfarads.}$$

Si, par exemple, on la rapporte au kilomètre cube, elle aura pour valeur

$$\frac{c}{4\pi} \times \frac{10^{16}}{v^2} \text{ microfarads,}$$

ou, en remplaçant v par 300.000.000,

$$\frac{c}{113} = c \times 0{,}009 \text{ microfarads environ.}$$

Ainsi, la capacité spécifique absolue de l'air rapportée au kilomètre cube est 0,009 microfarads ; celle de la gutta-percha, dont la capacité est 4 par rapport à l'air, est 0,036.

En Angleterre, on rapporte ordinairement la capacité électrostatique au cube ayant pour côté un mille marin (1.852 mètres). La valeur absolue qui correspond au coefficient c est alors

$$\frac{c \times 1.852 \times 10^{13}}{4\pi v^2},$$

ou

$$c \times 0{,}017.$$

Pour l'air cette capacité spécifique est 0,017 ; pour la gutta-percha, elle est environ 0,068.

391. La capacité spécifique de la matière qui forme l'enveloppe isolante des câbles sous-marins peut se déduire de leurs dimensions et de la capacité qui correspond à une longueur déterminée, qui peut être mesurée directement par l'expérience.

On a vu que la capacité S, en unités électrostatiques absolues, d'un câble de longueur l, dont les diamètres extérieurs et intérieurs de l'enveloppe sont D et d, est

$$S = \frac{cl}{2 \log \text{nép.} \frac{D}{d}}$$

ou

$$S = \frac{cl \times 0,4343}{2 \log \frac{D}{d}};$$

dans le système électro-magnétique absolu (mètre, seconde, masse du gramme) cette capacité est

$$S = \frac{cl \times 0,4343}{2 \log \frac{D}{d}} \times \frac{1}{v^2};$$

en microfarads, elle a pour valeurs :

$$S = \frac{cl \times 0,4343}{2 \log \frac{D}{d}} \times \frac{10^{12}}{v^2}.$$

On a, d'un autre côté, pour la capacité spécifique qui correspond à un cube ayant pour côté a, et que nous représenterons par G :

$$G = \frac{ca}{4\pi} \times \frac{10^{12}}{v^2} \text{ microfarads.}$$

On en déduit, en éliminant c entre ces deux équations,

$$G = \frac{a}{l} \times \frac{S \log \frac{D}{d}}{2\pi \times 0,4343} = \frac{a}{l} \times \frac{S \log \frac{D}{d}}{2,728}.$$

Si la longueur l est égale au côté du cube adopté pour la mesure des capacités spécifiques, a, on a $a = l$ et

$$G = \frac{S \log \frac{D}{d}}{2,728} \text{ microfarads.}$$

Dans les ateliers de fabrication des câbles sous-marins on rapporte ordinairement, comme nous l'avons dit, la capacité spécifique au cube ayant un mille de côté, la longueur l doit alors être égale à un mille.

392. La capacité électrostatique spécifique de la gutta-percha pour les divers câbles immergés varie de 0,059 à 0,074. Pour le câble immergé en 1879 entre la France

et l'Algérie, on exigeait une capacité inférieure à 0,40 microfarads par mille marin; en adoptant ce chiffre, on devait avoir pour capacité spécifique absolue $\frac{0,4 \times 0,5344}{2,728}$ ou 0,078 microfarads. En réalité la capacité était, ainsi que nous l'avons dit, notablement inférieure; elle ne dépassait pas 0,068.

Remarques sur les noms des unités électriques.

393. Les noms que nous avons adoptés dans ce travail pour les diverses unités des quatre grandeurs principales, *Ohm* pour la résistance, *Volt* pour la force électromotrice, *Weber* pour l'intensité et *Farad* pour la capacité électrostatique sont ceux qui sont le plus habituellement employés; mais il convient de remarquer qu'il y a encore quelque confusion parmi les physiciens sur la véritable signification de plusieurs de ces noms, auxquels on peut ajouter celui d'*OErsted*, qui a été proposé pour la désignation de la cinquième unité.

Si, en effet, l'ohm et le volt représentent toujours les unités de résistance et de force électromotrice, les autres noms sont souvent appliqués à des unités différentes de celles que nous avons indiquées.

Ainsi, le mot weber désigne tantôt l'unité d'intensité avec le milliweber pour sous-multiple, et tantôt l'unité de quantité, dans ce dernier cas l'unité d'intensité étant celle du courant produit par un weber par seconde.

De même le mot farad, par lequel nous avons représenté l'unité de capacité électrostatique, est souvent employé comme désignant l'unité de quantité.

L'unité de quantité est donc représentée par les mots farad et weber, et l'unité d'intensité par un farad par

seconde, par un weber par seconde ou enfin par le mot œrsted, récemment introduit.

Toutefois, l'habitude paraît avoir prévalu, surtout parmi les télégraphistes, d'appliquer, comme nous l'avons fait, le nom de weber à l'unité d'intensité et celui de farad à l'unité de capacité électrostatique.

Quant à l'unité de quantité, elle n'est désignée par aucun nom spécial, et c'est à cette seule grandeur que l'on pourrait appliquer le nom d'Œrsted, bien que les travaux de ce savant n'aient pas eu, en général, l'électricité statique pour objet.

394. En Allemagne, on admet ordinairement comme unité de résistance, sous le nom d'*unité Siemens*, celle d'une colonne de mercure de $0^{mq},001$ de section et de 1 mètre de hauteur, qui, d'après ce que nous avons dit (n° 308), est égale à 0,956 ohm.

Comme unité de force électromotrice, on prend celle de l'élément Daniell, égale à 1,079 volt.

Enfin, comme unité d'intensité, celle du courant produit par un élément Daniell sur un circuit de résistance égale à 1 unité Siemens.

Si nous représentons cette dernière unité par A, on a :

$$1 \text{ unité } A = \frac{1,079}{0,9563} \text{ webers} = 1,131 \text{ webers.}$$

Réciproquement, les unités de l'Association britannique exprimées en unités allemandes sont :

1 ohm = 1,045 unités Siemens,
1 volt = 0,926 Daniell,
1 weber = 0,881 unité A.

Enfin quelques savants allemands adoptent encore, sous le nom de *weber*, une unité d'intensité égale à 0,1 weber de l'Association scientifique.

Ces variations d'unités sont regrettables, et peuvent entraîner des confusions fâcheuses. Nous n'avons pas besoin d'insister sur l'utilité d'adopter un système uniforme de mesures; celui de l'Association britannique est, sans contredit, le plus rationnel.

Tableau des unités de l'Association britannique.

395. Le tableau suivant résume les unités de l'Association britannique avec leurs multiples et sous-multiples.

1° *Unités de résistance* (R).

Ohm (ω).	$= 10^{7}$ unités absolues	$\frac{L}{T}$.
Megohm (Ω) $= 10^{6}$ ohms. . . .	$= 10^{13}$	*id.*
Microhm $= 10^{-6}$ ohms.	$= 10$	*id.*

Unités de force électromotrice ou de potentiel (E).

Volt (Δ).	$= 10^{8}$ unités absolues	$\frac{L^{\frac{3}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T^{2}}$.
Megavolt $= 10^{6}$ volts.	$= 10^{14}$	*id.*
Microvolt (δ) $= 10^{-6}$ volts. . .	$= 10^{-1}$	*id.*

Unités d'intensité (I).

Weber (Γ).	$= 10^{-1}$ unités absolues	$\frac{L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}}{T}$.
Milliweber (γ) $= 10^{-3}$ webers. .	$= 10^{-4}$	*id.*

Unités de capacité électrostatique (S).

Farad (Φ).	$= 10^{-9}$ unités absolues	$\frac{T^{2}}{L}$.
Megafarad $= 10^{6}$ farads.	$= 10^{-3}$	*id.*
Microfarad (φ) $= 10^{-6}$ farads. .	$= 10^{-13}$	*id.*

Unités de quantité.

Unité (θ).	$= 10^{-1}$ unités absolues	$L^{\frac{1}{2}}M^{\frac{1}{2}}$.

CHAPITRE XIII.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE L'UNITÉ ABSOLUE DE RÉSISTANCE.

396. Il nous reste à décrire l'appareil employé à *King's college* par la commission de l'Association britannique pour effectuer la détermination de l'unité absolue de résistance, ou plutôt de l'unité absolue $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ multipliée par 10^7 ou de l'ohm. Le principe de la méthode a déjà été donné aux n[os] 244 et 245.

L'expérience consistait à faire tourner d'un mouvement rapide et régulier autour d'un petit aimant un cadre circulaire sur lequel était enroulé un fil conducteur et à déduire de la déviation produite par le courant qui traverse ce fil, sous l'action inductrice du magnétisme terrestre, sa résistance absolue qu'on comparait à celle d'un conducteur fixe maintenu dans des conditions invariables de température.

En désignant par T la durée d'une demi-révolution du cadre circulaire, par r son rayon, par n le nombre de tours de fil et par δ la déviation de l'aimant, qui était

fixe lorsque la vitesse de rotation atteignait une certaine limite, on avait la formule :

$$R = \frac{n^2\pi^2}{\tang \delta} \times \frac{r}{T},$$

ou, en représentant par L la longueur du fil, $L = 2n\pi r$,

$$R = \frac{n\pi}{2 \tang \delta} \times \frac{L}{T}.$$

Description de l'appareil employé à King's college pour déterminer l'étalon de résistance.

397. L'appareil employé pour déterminer l'étalon absolu de résistance comprend cinq parties distinctes : 1° la machine motrice ; 2° la bobine tournante et l'aimant ; 3° le régulateur ; 4° l'échelle et le télescope pour l'observation de la déviation de l'aimant ; 5° la balance électrique, ou pont de Wheatstone, qui servait à comparer la résistance trouvée pour la bobine tournante avec celle d'un fil étalon en maillechort.

La figure 4, *pl.* 1, montre, à l'échelle d'environ 1 pour 20, l'ensemble des dispositions adoptées pour les quatre premières parties.

398. La machine motrice consistait en un volant X fixé sur une roue A et qu'on faisait mouvoir à la main dans le sens indiqué par la flèche ; une courroie $b\ b_1\ b_2\ b_3\ b_4$ communiquait le mouvement à une roue B qui, par une seconde courroie $a\ a_1\ a_2$ passant sous un petit galet Z, faisait tourner la bobine d'induction I'. C, C représentant deux poulies fixes qui servaient de guide, D, D deux poulies mobiles maintenues à une distance constante par un montant E soutenant un poids W, et disposées d'après le système d'Huygens.

Lorsque la résistance qu'éprouvait le mouvement de la poulie B dépassait une certaine limite, le moteur soulevait le poids W, qui agissait sur cette poulie avec une force constante et restait suspendu entre le sol et la partie supérieure du bâti.

On obtenait ainsi un mouvement parfaitement régulier de la roue B et de la bobine d'induction.

399. La bobine d'induction, qui constitue la partie la plus importante de l'appareil, est représentée à l'échelle de $\frac{1}{5}$ dans les figures 1 et 3; la figure 2 montre le mode de suspension de l'aimant à l'échelle de $\frac{1}{3}$. La bobine était soutenue par un fort bâti en laiton HH reposant sur trois chevilles F, F, F scellées sur une lourde pierre, et qui pouvait être mis de niveau avec une grande précision au moyen de trois vis volantes, G, G, G.

L'anneau tournant en laiton I I, sur lequel était enroulé le fil conducteur dont on mesurait la résistance, était supporté par un pivot J, et portait à sa partie supérieure un cylindre creux K; ce dernier tournait dans une pièce de laiton fixée au bâti, contre laquelle elle était serrée par une sorte de petite boîte à étoupe *k* (*fig.* 2).

La bobine de fil de cuivre était divisée en deux parties enroulées sur chacun des deux anneaux I et I′ (*fig.* 3), séparés pour laisser passer le fil de suspension de l'aimant.

Chacun de ces deux anneaux était formé de deux parties distinctes, isolées l'une de l'autre par deux pièces de caoutchouc vulcanisé *f*, *f′*; ces deux pièces isolantes avaient pour effet d'empêcher les courants d'induction de se développer dans l'anneau de laiton pendant sa rotation.

Le fil de cuivre recouvert était enroulé dans le même

sens sur les deux anneaux tournants; ses deux extrémités aboutissaient à deux pièces de cuivre h, h' isolées par du caoutchouc vulcanisé, et dans chacune desquelles était creusée une petite coupe à mercure.

Pendant la rotation, les deux coupes étaient réunies par une petite tige de cuivre dont les extrémités avaient été amalgamées pour assurer un contact parfait.

Quand le fil de la bobine tournante devait être mis en relation avec la balance électrique, pont de Wheatstone, pour être comparé à un conducteur fixe, on enlevait la petite tige de cuivre qui réunissait les coupes à mercure h et h', et l'on établissait les communications au moyen de deux autres tiges épaisses qui plongeaient, d'une part, dans les deux coupes h et h', et, de l'autre, dans deux coupes semblables fixées sur le pont.

Lorsque la bobine était en mouvement et que le circuit était coupé en h et h', on n'observait aucune oscillation de l'aimant, et l'on pouvait en conclure qu'il ne se développait pas de courant d'induction étranger.

La rotation était communiquée à la bobine par une corde de boyau a, a_1, a_2 (*fig.* 4) qui était tendue à la limite convenable, à l'aide de la petite poulie Z fixée sur un poids W, qu'on pouvait avancer ou reculer.

Le compteur consistait en une roue hélicoïdale n (*fig.* 1) fixée à l'axe de la bobine tournante, et qui communiquait le mouvement à une roue dentée O munie de 100 dents.

Une pointe p fixée sur la circonférence de la roue O soulevait à chaque tour un ressort qui, en retombant, frappait un coup sur un timbre M.

Le son étant reproduit toutes les fois que la roue n avait exécuté cent révolutions, l'intervalle des sons, mesuré à l'aide d'un chronomètre, faisait connaître la vitesse de rotation de la bobine.

Une seconde poulie *r* servait à communiquer, par une courroie *c*, c_1 (*fig.* 4), le mouvement au régulateur.

400. On voit dans la figure 2 le mode de suspension de l'aimant. Un trépied de laiton N fixé sur le bâti supportait un long tube de laiton O qui passait librement à travers le cylindre K et entre les deux bobines I et I'. Une boîte cylindrique P était fixée à l'extrémité inférieure de ce tube. L'aimant, qui n'avait qu'une très faible longueur pour éviter le développement de courants d'induction, était suspendu dans cette boîte, dont la partie inférieure pouvait être enlevée afin de vérifier sa position.

Le tube O prolongé en R, au-dessus du trépied N, soutenait une petite chambre de verre T dans laquelle se mouvait le miroir par l'intermédiaire duquel on mesurait la déviation. Ce miroir, *t*, relié à l'aimant S par une tige rigide en laiton, était suspendu dans la chambre T par un fil de cocon d'environ huit pieds de long, protégé contre les courants d'air par une cage en bois qui n'est pas représentée dans la figure et qui s'étendait depuis la chambre T jusqu'au point de suspension.

Le fil de cocon était fixé à une pièce mobile permettant de le faire tourner sur lui-même pour faire disparaître toute torsion et pouvait être élevé ou abaissé au moyen d'une petite poulie. Il était, ainsi que le miroir et l'aimant, tellement à l'abri des courants d'air et des vibrations produits par le mouvement, que l'image de l'échelle graduée, réfléchie par le miroir, était aussi claire et aussi nette lorsque la bobine tournante effectuait 400 révolutions par minute que lorsqu'elle était au repos.

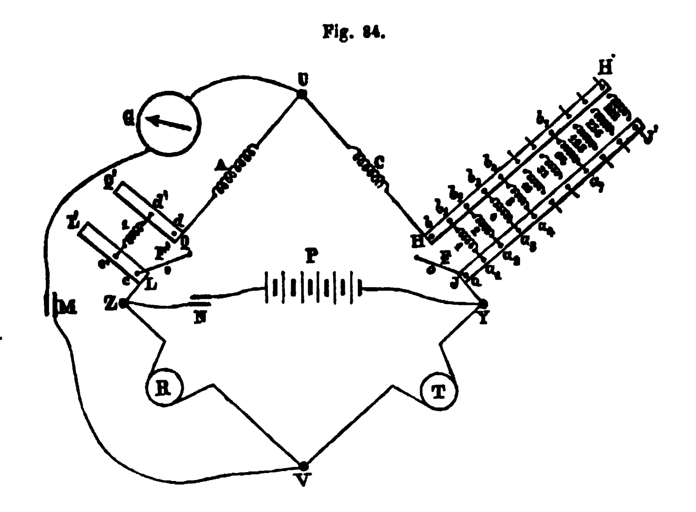
401. Le régulateur R (*fig.* 1), mis en mouvement par la corde *cc*, était un régulateur à force centrifuge dont la forme a varié et qu'il est inutile de décrire ici.

Enfin la lunette L (*fig.* 1) servait à viser le miroir *t* et à observer le degré, réfléchi par ce miroir, d'une échelle graduée projetée en E, ce qui permettait d'en déduire exactement la déviation de l'aimant.

402. Pour comparer la résistance de la bobine tournante à celle d'un fil conducteur invariable, on se servait d'un pont de Wheatstone un peu modifié de façon à pouvoir faire varier la résistance des deux bras, et dont nous allons indiquer le principe.

R (*fig.* 84) correspond au fil de la bobine tournante de

Fig. 84.



l'appareil qui vient d'être décrit et dont la résistance absolue était connue par l'expérience; T représente l'étalon fixe en maillechort, maintenu à une température constante, auquel la bobine R devait être comparée et qui offrait à peu près la même résistance; A et C sont deux bobines que, par des expériences préalables, on avait rendues parfaitement égales.

JJ', HH', QQ' et LL' sont quatre pièces épaisses de cuivre dans lesquelles sont creusées des petites coupes à mercure a, a_1, a_2, etc., b, b_1, b_2, etc., c, c' et d, d'. Deux tiges épaisses de cuivre F et F' permettent de mettre directement en communication a et b, ainsi que c et d. Lorsque ces communications sont établies, l'arrangement est le même que celui du pont de Wheatstone ordinaire. Les deux manipulateurs M et N étaient disposés comme dans la figure 71 de façon à fermer à peu près simultanément le circuit de la pile P et celui du galvanomètre G, lorsqu'on appuyait sur une poignée unique.

403. Si les résistances R et S sont parfaitement égales, l'aiguille du galvanomètre reste en repos lorsqu'on ferme les circuits à l'aide des manipulateurs M et N, alors que les tiges F et F' réunissent directement les coupes a et b, c et d; mais cette condition n'est pas ordinairement remplie rigoureusement.

Un certain nombre de bobines sont disposées de façon à pouvoir être mises en communication à volonté entre les deux barres JJ' et HH'; leurs extrémités dénudées peuvent être plongées dans les petites coupes à mercure creusées dans ces barres. Les résistances de ces fils varient suivant la progression géométrique 1, 2, 4, 8, 16, etc., celle de la première a_1b_1 étant égale à 0,01 de celle des bobines C ou A. Une bobine $c'd'$ peut également être intercalée entre les barres LL' et QQ'; sa résistance est égale à celle de la première bobine (a_1 b_1) de l'autre série.

La résistance de la branche UZ du pont étant représentée par 100 lorsque la tige F' plonge dans les coupes c et d, est donc 101 si, cette tige étant enlevée, le circuit se complète par le fil $c'd'$.

Quant à la résistance de la branche UY, elle est égale

à celle de la bobine C, et est représentée par 100 si la tige F est placée entre a et b, par 101 si, la tige F étant enlevée, la bobine 1 est seule dans le circuit, par $100 + \alpha$ si α représente la résistance réduite des divers fils intercalés simultanément entre les barres JJ′ et HH′.

Lorsque tous les fils sont placés dans le circuit entre les deux barres la résistance qu'ils offrent au courant, est égale à $\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{512}}$, ou à environ 0,5 de la résistance de la petite bobine $a_1 b_1$.

On peut donc avoir dans la branche UV du pont une résistance variant de 100,5 à 101 avec une approximation de $\frac{1}{512}$, ou environ 0,002 p. 100.

Ainsi le rapport des deux bras du pont peut varier de $\frac{101}{100}$ à $\frac{100,5}{100}$ si la tige F_1 réunit les coupes c et d, et de $\frac{101}{101}$ à $\frac{100,5}{101}$ si cette tige est enlevée; en intervertissant les bobines R et T, le rapport peut varier de $\frac{100}{101}$ à $\frac{100}{100,5}$ et de $\frac{101}{101}$ à $\frac{101}{100,5}$. On a donc pour le rapport une marge de 0,99 à 1,01, avec une approximation de 0,002 p. 100. Le rapport des résistances des deux bobines à comparer, R et T, ne doit pas dépasser ces limites.

L'expérience était faite avec le pont de Wheatstone, déjà décrit à l'occasion de la reproduction des copies de l'étalon (n° 304); on s'était contenté d'ajouter les tiges HH′, JJ′, LL′ et QQ′, dont les extrémités plongeaient dans de petites coupes à mercure.

La sensibilité était telle que l'addition ou la soustrac-

tion de la bobine 512 produisait un effet appréciable sur le galvanomètre.

Calcul de la résistance; corrections.

404. Nous avons donné plus haut la formule théorique qui exprime la résistance R de la bobine tournante de l'appareil qui vient d'être décrit, en fonction de la longueur L du fil, du nombre n de tours, de la déviation δ de l'aiguille et de la vitesse de rotation, mesurée par le temps T qu'emploie le cadre à exécuter une demi-révolution. Cette formule,

$$R = \frac{n\pi^2}{2 \tang \delta} \times \frac{L}{T},$$

a été établie dans l'hypothèse où tous les tours du fil ont le même rayon et ont une même aetion sur la bobine. Or, il ne peut en être ainsi dans la pratique, et il y a lieu d'introduire une correction pour teuir compte de cette cause d'erreur.

Si l'on remonte à la manière dont la formule a été établie (n° 244), on voit que le couple qui agit sur l'aiguille aimantée et qui correspond à chacun des tours de fil est une fonction de la quantité d'électricité qui circule pendant un demi-tour du cadre ou de l'intensité moyenne du courant induit, du rayon de la circonférence décrite par le fil, et de la distance de cette circonférence au centre, qui n'est égale à son rayon que pour les tours situés dans le plan vertical passant par l'axe de suspension.

405. Soit BCC'B' (*fig.* 85) la trace de la bobine tournante

sur un plan passant par l'axe vertical de rotation ZZ' et normal à la direction du méridien magnétique, O le centre de la bobine où se trouve l'aimant que nous supposerons d'abord réduit à un seul pôle magnétique.

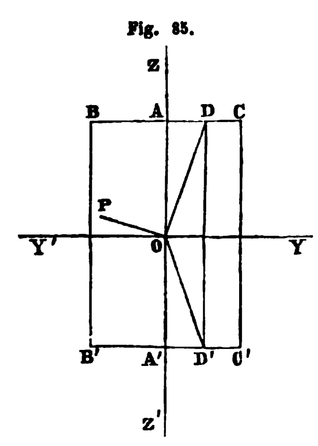


Fig. 85.

La rotation développe un courant induit qui, pour chaque élément tel que D, agit sur le pôle magnétiqne suivant une direction OP normale à la ligne OD, menée par le centre et l'élément.

On a la composante de cette force suivant la direction OY', composante qui est la même pour deux tours situés à égale distance des deux côtés du milieu AA' de la bobine, en multipliant la force par cos POY' ou par sin DOY.

La force totale développée par la circonférence DD' est donc

$$f = \frac{2\pi r \mu A \sin DOY}{OD^2} = \frac{2\pi\mu A \sin^3 DOY}{r},$$

r étant le rayon OA et A représentant l'intégrale de l'expression

$$\frac{\pi r^2 h \cos\alpha [\sin(\alpha + d\alpha) - \sin\alpha]}{RT}.$$

de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$ (voir n° 244), égale à $\frac{\pi^2 r^2 h}{2RT}$ dans le cas d'un seul tour de fil, et à la somme

$$\frac{\pi^2 h}{2RT}(r^2_1 + r^2_2 + r^2_3 + \ldots),$$

si le fil forme plusieurs tours de rayons r_1, r_2, r_3, etc.,

dont les uns peuvent être égaux et les autres différents.

En représentant par β_1, β_2, β_3, etc., les angles tels que DOY qui correspondent aux divers tours de fil, on a

$$f = \frac{\pi^2 \mu h}{RT}\left(\frac{\sin^2 \beta_1}{r_1} + \frac{\sin^2 \beta_2}{r_2} + \text{etc.}\right)(r^2_1 + r^2_2 + \text{etc.}).$$

Si l'on considère les rayons r_1, r_2, r_3 comme égaux au rayon moyen de la bobine tournante, r, si n est le nombre des tours et si β est la moitié de l'angle moyen, DOD', sous-tendu par le diamètre moyen du tour de fil situé à égale distance de ZZ' et de CC', on a

$$f = \frac{\pi^2 n^2 r \mu h \sin^2 \beta}{RT}.$$

Enfin si le pôle unique est remplacé par un petit aimant, on a, comme au n° 245, pour la position d'équilibre correspondant à une déviation δ

$$f \cos \delta = \mu h \sin \delta;$$

d'où l'on tire, en remplaçant f par sa valeur,

$$R = \frac{\pi^2 n^2 \sin^2 \beta}{\tang \delta} \times \frac{r}{T},$$

ou en introduisant la longueur $L = 2n\pi r$ du fil :

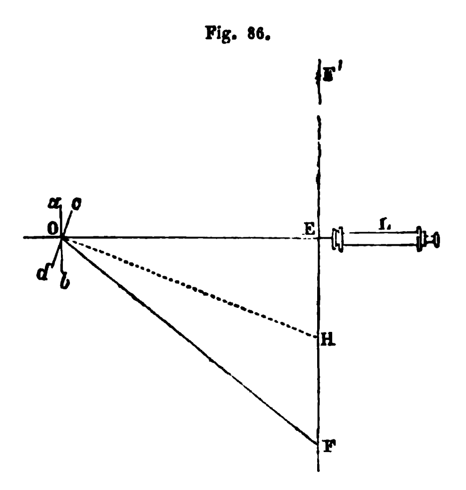
$$R = \frac{\pi^2 n \sin^2 \beta}{2 \tang \delta} \times \frac{L}{T}.$$

406. Pour avoir la déviation de l'aimant on visait, ainsi qu'on l'a vu dans la description de l'appareil, avec une lunette L, un miroir t fixé au fil de suspension (*fig.* 4, *pl.* 1), et on lisait le degré de l'échelle réfléchi par ce miroir.

Soient ab (*fig.* 86) la position du miroir qui correspond au repos et pour laquelle on voit, avec la lunette L, le zéro

E, de l'échelle FF', et *cd* celle qui correspond à une certaine vitesse de rotation de la bobine tournante; le degré

Fig. 86.



F de l'échelle qu'on lit à travers le miroir est tel que les angles d'incidence et de réflexion EOH et HOF sont égaux entre eux et à l'angle de déviation *a*O*c*.

Si l'on représente par D la distance OE et par θ la longueur EF, exprimées en fonction de la même unité, on a, δ étant la déviation *a*O*c* ou EOH,

$$\operatorname{tang} \mathrm{EOF} = \operatorname{tang} 2\delta = \frac{\theta}{\mathrm{D}};$$

on en tire :

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{-1+\sqrt{1+\operatorname{tang}^2 2\delta}}{\operatorname{tang} 2\delta} = \frac{\mathrm{D}}{\theta}\left(-1+\sqrt{1+\frac{\theta^2}{\mathrm{D}^2}}\right),$$

ou, en prenant les trois premiers termes du développement de $\sqrt{1+\frac{\theta^2}{\mathrm{D}^2}}$,

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\mathrm{D}}{\theta}\left(\frac{1}{2}\frac{\theta^2}{\mathrm{D}^2} - \frac{1}{8}\frac{\theta^4}{\mathrm{D}^4}\right) = \frac{1}{2}\frac{\theta}{\mathrm{D}}\left(1-\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{\mathrm{D}^2}\right),$$

et, par suite,

$$\frac{1}{\operatorname{tang} \delta}=\frac{2D}{\theta}\left(1+\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{D^2}\right).$$

En substituant cette valeur dans l'expression donnée plus haut de la résistance R, on a :

$$R=\frac{\pi^2 n DL \sin^2 \beta \left(1+\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{D^2}\right)}{\theta T}.$$

Si T_1 représente la durée de 100 révolutions de la bobine, on a $T_1 = 200\,T$ ou $T = \frac{T_1}{200}$, et R devient :

$$R=\frac{200\pi^2 n DL \sin^2 \beta}{\theta T_1}\left(1+\frac{1}{4}\frac{\theta^2}{D^2}\right),$$

dans laquelle les seules quantités variables sont la durée T_1 de la révolution de 100 tours, et le degré θ de l'échelle réfléchi par le miroir tournant et qu'on lit à l'aide de la lunette.

407. Ainsi que nous l'avons dit, deux séries d'expériences ont été faites par la sous-commission de l'Association britannique pour la détermination de l'unité absolue de résistance, la première en juin 1863, la seconde en 1864. Le même appareil a été employé dans les deux séries, mais la longueur et la section du fil enroulé sur le cadre étaient différentes.

Le tableau suivant donne les dimensions exactes des parties de l'appareil et des conducteurs, dont on avait besoin pour effectuer le calcul de la résistance de ces derniers, et qui ont été mesurées en 1864 avec une précision encore plus grande qu'en 1863 :

	Expériences de 1863.	Expériences de 1864.
Nombre de tours du fil enroulé sur la bobine tournante, n.	307	313
Longueur du fil enroulé, L.	302^m,063	311^m,118
Rayon moyen des bobines tournantes.	0 ,1566	0 ,158194
Largeur de chacune des deux bobines..	0 ,0185	0 ,01841
Épaisseur des bobines.	0 ,0132	0 ,01608
Distance entre le centre de rotation et le plan correspondant au milieu de chacune des bobines.	0 ,01915	0 ,01925
Angle sous-tendu au centre par le rayon moyen du milieu des bobines. β	83°1′	83°6′
$\sin^2\beta$..	0,97791	0,97843
Distance D du centre du miroir à l'échelle. .	2^m,9853	2^m,212 et 2^m,116

En remplaçant n, L, D et $\sin^2\beta$ par les nombres correspondants dans la valeur de R, et en admettant que la longueur θ qui mesure la déviation soit exprimée en millimètres, on est conduit, pour la première série d'essais, à l'expression suivante :

$$R = \frac{5343818858872}{\theta T_1} + \frac{\theta}{T_1} \times 1490.$$

408. Il y avait lieu d'introduire dans cette formule un certain nombre de corrections positives ou négatives, pour tenir compte des diverses causes d'erreur, dont les unes modifiaient le coefficient de $\frac{1}{\theta T_1}$ et les autres le coefficient de $\frac{\theta}{T_1}$.

Les premières étaient dues à la différence d'action des divers tours de fil, signalée au n° 404, à la torsion du fil de suspension de l'aimant, à l'induction électromagnétique exercée par ce dernier sur la bobine, à la forme du cadre qui n'était pas absolument cylindrique, etc. ; les autres provenaient surtout de l'induction de la bobine tour-

nante sur elle-même, qui tendait à accroître la déviation.

Nous n'entrerons pas dans le détail de ces corrections qui ont été calculées par M. Maxwell et qui, introduites dans la formule, ont conduit à la valeur suivante de R, adoptée par la commission en 1863.

$$R = \frac{538145581730}{\theta T_1} + \frac{\theta}{T_1} \times 3055,5.$$

409. Le courant d'induction développé dans la bobine était intermittent; mais, lorsque la vitesse de rotation dépassait 100 révolutions par minute, les intermittences n'étaient pas sensibles sur l'aimant dont on n'observait que les seules oscillations naturelles.

Avant chaque expérience, on comparait au moyen du pont de Wheatstone, décrit au n° 402, la résistance de la bobine de l'appareil avec celle du conducteur fixe en maillechort maintenu à une température fixe, et on observait le degré de l'échelle réfléchi par le miroir au repos, puis on mettait la machine en mouvement.

Lorsque la vitesse de rotation qu'on désirait obtenir était atteinte et constante, un observateur mesurait avec un chronomètre l'intervalle qui séparait deux coups frappés sur le timbre et correspondant à 100 révolutions, pendant qu'un autre observateur visait avec la lunette le miroir fixé à la tige de suspension de l'aimant qui oscillait régulièrement, et notait les divisions extrêmes en millimètres de l'échelle graduée réfléchies par ce miroir.

A la fin de l'expérience, on laissait l'aiguille reprendre sa position normale, et l'on observait de nouveau avec la lunette la division de l'échelle réfléchie par le miroir au repos, qui pouvait ne pas être exactement la même qu'au début. Pour avoir la division correspondant à la position

de repos de l'aimant à un instant quelconque de l'expérience, on comparait les deux nombres trouvés aux indications fournies par l'observatoire magnétique de Kew, où la déclinaison est enregistrée automatiquement d'une manière continue.

Enfin on comparait de nouveau la résistance de la bobine tournante avec celle de la bobine fixe de maillechort.

410. Dans l'une des expériences (23 juin 1863), la déviation, rectifiée ainsi qu'il vient d'être dit, était de 339,94, correspondant à un angle d'environ 6° 29 1/2, pour une vitesse de rotation de 100 révolutions en $T_1 = 14^s.464$ secondes (environ 408 révolutions par minute). En substituant ces deux nombres dans la formule ci-dessus, on avait pour la résistance absolue de la bobine tournante 109448144 $\frac{\text{mètres}}{\text{secondes}}$, et l'on en déduisait celle du conducteur en maillechort maintenue à une température constante. La résistance de ce conducteur était donnée par la moyenne des expériences ainsi faites.

A la suite des expériences de 1863, on a établi un étalon provisoire représentant l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètres}}{\text{secondes}}$ avec une approximation qu'on a évaluée à 0,24 p. 100.

411. En 1864, les expériences ont été plus nombreuses; on a fait varier la vitesse de rotation de la bobine tournante dans des limites plus étendues, de 110 à 500 révolutions par minute, les diverses longueurs avaient été mesurées avec une plus grande précision, et l'on avait pris encore plus de précautions pour éviter les chances d'erreurs.

On a établi un second étalon qui diffère de 0,16 pour 100 de celui de 1863 et représente l'unité ab-

solue avec une approximation évaluée à 0,1 pour 100.

Enfin on a pris une moyenne entre les deux étalons de 1863 et de 1864, en attribuant à ce dernier une importance cinq fois plus grande qu'au premier, en raison du plus grand nombre d'expériences qui ont servi à le déterminer. C'est cette moyenne qui constitue l'étalon définitif dont plusieurs types sont conservés dans les archives de l'Association scientifique et qui a reçu le nom d'*unité B.A* ou d'*ohm.*

D'après la commission de l'Association britannique, cet étalon représente la véritable valeur de l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètres}}{\text{secondes}}$ avec une approximation d'environ 0,08 p. 100.

412. On passe facilement de l'ohm à l'unité absolue, prise par rapport à des unités de longueur et de temps quelconques, en multipliant l'ohm par le rapport du nombre de mètres que contient la nouvelle unité de longueur, au nombre de secondes que contient la nouvelle unité de temps.

Ainsi, le pied anglais étant égal à $0^m,3048$, l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ pieds}}{\text{seconde}}$ a pour valeur 0,3048 ohms.

413. D'autres déterminations de l'unité absolue $\frac{\text{mètre}}{\text{seconde}}$ ont été effectuées à diverses reprises et ont conduit à des résultats un peu différents de celui qui a été admis à la suite des expériences de la sous-commission de l'Association scientifique.

Ainsi Weber, par les méthodes qui ont été indiquées sommairement aux n°s 242 et 243, avait trouvé d'abord une valeur qui correspond à 1,05 ohm (*); une expé-

(*) Le chiffre trouvé par Weber pour l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ pied}}{\text{seconde}}$, corres-

rience nouvelle, effectuée en 1862, l'a conduit, pour l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètre}}{\text{seconde}}$ à une valeur qui correspond à 0,9191 ohms.

M. Kolrausch a trouvé, par une méthode analogue à celle de Weber, le chiffre 1,009 ohms.

Enfin plus récemment, M. Lorenz, par un procédé différent, fondé sur le développement des courants d'induction dans un plateau tournant sous l'influence du magnétisme terrestre, a trouvé des nombres dont la moyenne correspond à 0,968 ohms (*).

La difficulté de reproduire et de comparer des étalons et des bobines avec une précision suffisante dans des conditions absolument identiques de température ne suffit pas pour rendre compte de ces différences.

414. Quoi qu'il en soit, si le chiffre 0,08 p. 100, indiqué par la commission de l'Association scientifique pour l'approximation avec laquelle son étalon représente la véritable valeur de l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètres}}{\text{secondes}}$, est peut-être un peu exagéré, nous pensons cependant que l'ohm s'en rapproche assez pour qu'on puisse le prendre pour base dans la plupart des calculs où l'on peut avoir à faire intervenir la résistance d'un circuit avec sa signification mécanique. L'introduction de cette grandeur dans l'étude ordinaire de l'électricité constitue un pas important pour

pondait à 0,3202 ohm, ce qui donne pour l'unité absolue $\frac{10^7 \text{ mètre}}{\text{seconde}}$

$$\frac{0,3202}{0,3048} = 1,05 \text{ ohm.}$$

(*) *Journal de physique*, 1873.

la science, et les savants qui ont contribué à la déterminer et à la faire adopter dans la pratique méritent la reconnaissance de tous ceux qu'intéresse l'étude de l'électricité.

NOTE

THÉORIE MATHÉMATIQUE DES PHÉNOMÈNES ÉLECTROSTATIQUES.

415. La théorie mathématique des phénomènes électrostatiques a été donnée, en 1828, par Georges Green dans un mémoire publié à Nottingham et intitulé : *An Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism;* elle a été développée par M. Bertrand dans ses leçons au Collège de France, et a paru dans plusieurs ouvrages, notamment dans la *Théorie mécanique de la chaleur* de M. Briot, et dans le *Treatise on electricity and magnetism* de M. Clerk Maxwell. Cette théorie est encore peu connue en France, et nous croyons utile de la résumer.

I.

416. *De la fonction de force.* — Lorsqu'un mobile de masse m est soumis à l'action de forces dont la résultante a pour composantes, suivant trois axes rectangulaires, X, Y et Z, son mouvement est donné, en représentant par x, y et z les coordonnés du point où il se trouve à chaque instant par rapport aux trois mêmes axes, par les trois équations :

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = X,$$
$$m\frac{d^2y}{dt^2} = Y,$$
$$m\frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

Si l'on ajoute ces trois équations après avoir multiplié les deux termes de la première par $2dx$, ceux de la seconde par $2dy$ et ceux de la troi-

sième par $2dz$, il vient

$$m\left(2dx\frac{d^2x}{dt^2}+2dy\frac{d^2y}{dt^2}+2dz\frac{d^2z}{dt^2}\right)=2(\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz).$$

D'un autre côté, en représentant par v la vitesse du mobile, et par ds l'espace parcouru pendant un instant infiniment petit dt, on a

$$mv^2=m\frac{ds^2}{dt^2}=m\frac{(dx^2+dy^2+dz^2)}{dt^2},$$

ou, en différentiant,

$$dmv^2=m\left(2dx\frac{d^2x}{dt^2}+2dy\frac{d^2y}{dt^2}+2dz\frac{d^2z}{dt^2}\right).$$

Ces deux équations conduisent à la relation

$$\frac{d(mv^2)}{2}=\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz,$$

qui peut aussi se mettre sous la forme

$$\frac{d(mv^2)}{2}=\text{P}dp,$$

dmv^2 étant l'accroissement de force vive pendant un espace de temps infiniment petit, dp l'espace parcouru par le mobile pendant le même espace de temps, et P la projection de la force agissante sur la direction du mouvement.

417. L'équation précédente ne peut suffire à elle seule pour déterminer le mouvement complet du mobile, mais, lorsque le second membre, $\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz$, est intégrable, elle conduit à des résultats importants.

Pour que l'expression $\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz$ soit la différentielle d'une fonction, il faut en premier lieu que les trois composantes X, Y et Z ne dépendent que des coordonnées x, y et z, et, par conséquent, qu'elles soient indépendantes du temps.

Il faut en second lieu que l'on ait les trois relations

$$\frac{d\text{X}}{dy}=\frac{d\text{Y}}{dx},\quad \frac{d\text{X}}{dz}=\frac{d\text{Z}}{dx}\quad \text{et}\quad \frac{d\text{Y}}{dz}=\frac{d\text{Z}}{dy}.$$

Ces conditions sont remplies quand les forces qui agissent sur la masse mobile sont dirigées vers des points fixes et sont fonctions de sa distance à ces points, ce qui a lieu, par exemple, lorsqu'on étudie le mouvement d'un corps soumis à l'attraction de masses matérielles, celui d'un pôle magnétique ou d'une masse électrique se mouvant sous l'influence de masses magnétiques ou électriques.

Si $f(xyz)$ représente l'intégrale de $\text{X}dx+\text{Y}dy+\text{Z}dz$, on a

$$dmv^2=2df(xyz)$$

et par conséquent,

$$mv^2-m\text{K}^2=2[f(xyz)-f(abc)],$$

K représentant la vitesse du mobile au point dont les coordonnées sont a, b et c.

L'intégrale $f(xyz)$ de l'expression $Xdx + Ydy + Zdz$ se nomme la *fonction de force;* elle reçoit le nom de *fonction potentielle* ou de *potentiel* dans un cas particulier sur lequel nous allons revenir en appliquant la formule aux phénomènes électriques.

II.

418. *Potentiel électrique.* — Concevons une masse électrique, m, concentrée en un point, sur laquelle agit une autre masse électrique m_1, située à une distance r_1. La masse m est soumise à une force dirigée suivant la droite passant par les deux points où sont concentrées les masses m et m_1. Cette force est, d'après la loi de Coulomb, proportionnelle à $\frac{mm_1}{r_1^2}$ et est représentée par cette expression, si l'on prend pour unité de masse électrique la quantité d'électricité positive qui repousse une égale quantité d'électricité de même signe située à l'unité de distance avec l'unité de force. On considère la force comme positive lorsqu'elle produit une attraction, et, par conséquent, lorsque les masses m et m_1 sont de signes opposés, et comme négative dans le cas contraire. On a donc, en représentant par f la force qui agit sur m,

$$f = -\frac{mm_1}{r_1^2}.$$

Les composantes de cette force, suivant trois axes rectangulaires, sont, en désignant par x, y et z les coordonnées du point où se trouve la masse m et par x_1, y_1 et z_1 ceux du point fixe m_1 qui correspond à m_1 :

$$X = -\frac{mm_1(x_1 - x)}{r_1^3},$$
$$Y = -\frac{mm_1(y_1 - y)}{r_1^3},$$
$$Z = -\frac{mm_1(z_1 - z)}{r_1^3}.$$

Si, au lieu d'une seule masse électrique agissante, m_1, il en existe plusieurs, situées à des distances différentes de m, la force à laquelle est soumise cette dernière, a pour composantes :

$$X = -m\sum\frac{m_1(x_1 - x)}{r_1^3},$$
$$Y = -m\sum\frac{m_1(y_1 - y)}{r_1^3},$$
$$Z = -m\sum\frac{m_1(z_1 - z)}{r_1^3}.$$

On a, d'ailleurs, pour chacune des distances telles que r_1 la relation

$$r_1^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2.$$

419. Il est facile de reconnaître que les composantes X, Y et Z sont trois dérivées par rapport à x, y et z de la même fonction

$$-m\sum\frac{m_1}{r_1}.$$

La dérivée par rapport à x de cette fonction est, en effet,

$$m\sum\frac{m_1}{r_1^2}\frac{dr_1}{dx}=-m\sum\frac{m_1(x_1-x)}{r_1^3};$$

il en est de même pour les deux autres composantes.

L'expression $Xdx+Ydy+Zdz$ est donc la différentielle exacte de la fonction

$$-m\sum\frac{m_1}{r_1},$$

et l'on peut poser

$$Xdx+Ydy+Zdz=-m\times d\sum\frac{m_1}{r_1}.$$

420. Si m est égal à l'unité de masse d'électricité positive, l'équation devient

$$Xdx+Ydy+Zdz=-d\sum\frac{m_1}{r_1},$$

ou, en intégrant les deux membres,

$$\int Xdx+Ydy+Zdz=-\sum\frac{m_1}{r_1}+\sum\frac{m_1}{r'_1},$$

intégrale devant être prise pour deux positions de l'unité de masse électrique, et les sommes $\sum\frac{m_1}{r_1}$ et $\sum\frac{m_1}{r'_1}$ se rapportant à ces deux positions.

$\int Xdx+Ydy+Zdz$ représente le travail accompli par les forces électriques pendant le mouvement, ou la moitié de l'accroissement de force vive de l'unité de masse lorsqu'elle passe de l'une des positions à l'autre.

421. La somme $\sum\frac{m_1}{r_1}$ correspondant à un point donné, qui est égale et de signe contraire à la fonction de force $\int Xdx+Ydy+Zdz$, se nomme le *potentiel électrique* en ce point, et se représente habituellement par la lettre V; on a donc

$$V=\sum\frac{m_1}{r_1}.$$

Si V' est le potentiel $\sum\frac{m_1}{r'_1}$, on peut poser

$$\int Xdx+Ydy+Zdz=-(V-V').$$

Ainsi la différence de potentiel entre deux points est égale et de signe contraire au travail qui serait accompli par les forces électriques pour faire passer l'unité de quantité d'électricité du premier point au second, ou au travail qu'il faudrait dépenser pour amener l'unité de quantité du second point au premier. A une distance infiniment grande des masses électriques le potentiel $V' = \sum \frac{m_1}{r'_1}$ est nul; la valeur du potentiel en un point donné représente donc le travail à dépenser pour amener à ce point l'unité d'électricité positive d'une distance infinie; ce potentiel est positif ou négatif suivant que le travail est lui-même positif ou négatif.

Les trois composantes de la force au point dont le potentiel est V peuvent se mettre sous la forme :

$$X = -\frac{dV}{dx},$$
$$Y = -\frac{dV}{dy},$$
$$Z = -\frac{dV}{dz},$$

422. Si l'électricité, au lieu d'être concentrée en un certain nombre de points, occupe un espace déterminé, le potentiel a pour valeur

$$V = \int \frac{dq}{r} \quad \text{ou} \quad V = \sum \frac{dq}{r},$$

dq étant la quantité d'électricité contenue dans un volume infiniment petit situé à une distance r du point considéré. On peut aussi le mettre sous la forme

$$V = \int \frac{kdv}{r} \quad \text{ou} \quad V = \sum \frac{kdv}{r},$$

si dv est l'élément de volume, et k la densité de l'électricité que contient ce volume. Les trois composantes de la force sont :

$$X = -\frac{dV}{dx} = -\sum \frac{dq(x_1 - x)}{r^3},$$
$$Y = -\frac{dV}{dy} = -\sum \frac{dq(y_1 - y)}{r^3},$$
$$Z = -\frac{dV}{dz} = -\sum \frac{dq(z_1 - z)}{r^3},$$

r étant la distance de la masse dq, dont les coordonnées sont x_1, y_1 et z_1, au point dont le potentiel est V, et qui a pour coordonnées x, y et z.

Tant que le point auquel on suppose concentrée l'unité d'électricité est situé en dehors des masses agissantes, il ne peut y avoir aucune difficulté, puisque le potentiel $\sum \frac{m_1}{r_1}$ ou $\sum \frac{dq}{r}$, ainsi que les dérivées $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$ et les composantes X, Y et Z seront finis; mais il y a

lieu de rechercher si la même propriété des composantes de la force s'applique au cas où le point considéré fait partie des masses agissantes.

423. Considérons en premier lieu une couche homogène comprise entre deux sphères concentriques de rayons a et $a + da$, et soit ρ la distance du centre de ces deux sphères au point où est concentrée l'unité d'électricité positive, extérieure ou intérieure à cette couche.

Représentons par θ l'angle que forme la ligne qui joint le centre des deux sphères à un élément de volume dv de la couche sphérique avec la ligne droite passant par le centre et le point où se trouve l'unité d'électricité, et par φ l'angle que forme le plan passant par cette dernière droite et l'élément dv avec un plan fixe passant également par la même droite.

L'élément de volume a pour expression

$$dv = a^2 \sin\theta \, da d\theta d\varphi,$$

et la quantité dq d'électricité que contient cet élément de volume est, si k est la densité du fluide électrique,

$$dq = kdv = ka^2 \sin\theta \, da d\theta d\varphi.$$

L'élément de potentiel qui correspond à dq est

$$dV = \frac{dq}{r} = \frac{ka^2 \sin\theta \, da d\theta d\varphi}{r},$$

r étant la distance de l'élément dq au point dont on cherche le potentiel, qui est liée à a, ρ et θ par la relation

$$r^2 = a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos\theta.$$

Pour avoir le potentiel V, il faut prendre l'intégrale de dV pour toute l'étendue de la calotte sphérique, ce qui donne

$$V = ka^2 da \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{r} d\theta d\varphi = 2\pi ka^2 da \int_0^{\pi} \frac{\sin\theta}{r} d\theta.$$

On peut éliminer θ entre cette équation et la précédente qui, en prenant la différentielle des deux termes, donne

$$rdr = a\rho \sin\theta d\theta$$

ou

$$\sin\theta d\theta = \frac{rdr}{a\rho}.$$

On est ainsi conduit à l'équation

$$V = \frac{2\pi kada \int dr}{\rho}.$$

Pour avoir la valeur de V, il y a deux cas à considérer.

424. En premier lieu, le point dont on cherche le potentiel est à l'extérieur de la couche sphérique, auquel cas l'intégrale doit être prise de

$\rho - a$ à $\rho + a$, et a pour valeur

$$\int_{\rho-a}^{\rho+a} dr = 2a.$$

On a donc

$$V = \frac{4\pi k a^2 da}{\rho} = \frac{M}{\rho},$$

M désignant la masse électrique de la couche sphérique, égale à $4\pi k a^2 da$.

Dans ce cas, le potentiel est le même que si la masse entière de la couche était concentrée au centre.

425. Si le point est situé à l'intérieur de la couche sphérique, l'intégrale doit être prise de $a - \rho$ à $a + \rho$, et l'on a

$$\int_{a-\rho}^{a+\rho} dr = 2\rho$$

et

$$V = 4\pi k a da = \frac{4\pi k a^2 da}{a} = \frac{M}{a}.$$

Le potentiel d'un point intérieur à la couche est donc indépendant de sa position. On en déduit que l'action de la couche électrique est nulle, puisque $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$ et $\frac{dV}{dz} = 0$.

426. Considérons maintenant une sphère homogène de rayon a exerçant son action sur un point situé à l'intérieur à une distance ρ du centre. On peut considérer la sphère comme composée de couches homogènes concentriques. Les couches dont le rayon est moindre que ρ, agissant sur un point extérieur, donnent un potentiel égal à

$$\frac{4k\pi}{\rho} \int_0^{\rho} a^2 da = \frac{4k\pi\rho^2}{3};$$

celles dont le rayon est plus grand que ρ agissant sur un point intérieur donnent un potentiel égal à

$$4k\pi \int_{\rho}^{a} a da = 2k\pi(a^2 - \rho^2).$$

Le potentiel dû à la sphère entière est la somme des deux potentiels partiels; il a pour valeur

$$V = 2k\pi\left(a^2 - \frac{\rho^2}{3}\right).$$

Les dérivées du potentiel, par rapport à x, y et z, sont, si l'on prend pour coordonnées trois axes rectangulaires passant par le centre de la sphère,

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3} k\pi\rho \frac{d\rho}{dx}$$

ou

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{4}{3} k\pi x,$$

si l'on tient compte de la relation

$$\rho^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

De même, les dérivées par rapport à y et z sont

$$\frac{dV}{dy} = -\frac{4}{3} k\pi y,$$
$$\frac{dV}{dz} = -\frac{4}{3} k\pi z.$$

Ces dérivées sont égales et de signes contraires aux composantes de la orce qui agit sur le point considéré. La force est, en effet, uniquement due à la masse électrique située à l'intérieur de la sphère dont le rayon est ρ et est la même que si cette masse était concentrée au centre; elle a par conséquent pour valeur $\frac{4}{3} k\pi\rho$, et ses composantes suivant les trois axes sont

$$X = \frac{4}{3} k\pi x, \quad Y = \frac{4}{3} k\pi y \quad \text{et} \quad Z = \frac{4}{3} k\pi z.$$

On a donc

$$X = -\frac{dV}{dx}, \quad Y = -\frac{dV}{dy} \quad \text{et} \quad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

427. Imaginons maintenant un point situé à l'intérieur d'une masse électrique de forme quelconque, et supposons d'abord la densité de l'électricité constante autour du point considéré. Concevons une sphère autour de ce point, et supposons qu'on divise la masse électrique en deux parties, comprenant l'une le fluide contenu dans la sphère, et l'autre le fluide extérieur.

Le potentiel résultant, V, est égal à la somme des potentiels dus à chacune de ces deux parties, et les composantes totales sont égales à la somme des composantes partielles des forces développées par les deux masses électriques.

Si V_1 est le potentiel et X_1, Y_1 et Z_1 les composantes de la force qui se rapportent au fluide contenu dans la sphère, on a, pour chacune des composantes, X_1 par exemple,

$$X_1 = -\frac{dV_1}{dx}.$$

Si V_2 est le potentiel et X_2, Y_2 et Z_2 les composantes qui se rapportent au fluide situé à l'extérieur de la sphère, on a aussi

$$X_2 = -\frac{dV_2}{dx}.$$

On a, par conséquent, entre la composante résultante, $X = X_1 + X_2$, et le potentiel total, $V = V_1 + V_2$, la relation

$$X = X_1 + X_2 = -\frac{dV_1}{dx} - \frac{dV_2}{dx} = -\frac{dV}{dx}.$$

On a de même $Y = -\frac{dV}{dy}$ et $Z = -\frac{dV}{dz}$.

428. Nous avons supposé la densité constante aux environs du point dont on prend le potentiel, mais la même loi s'applique au cas où cette densité est variable, car on peut imaginer autour de ce point une sphère de rayon assez petit pour qu'on puisse admettre que la densité soit uniforme à l'intérieur. La proposition peut d'ailleurs se démontrer rigoureusement. (Voir la démonstration de M. Bouquet, dans la *Théorie mécanique de la chaleur* de M. Briot.)

429. *Surfaces de niveau.* — On nomme surfaces de niveau, ou surfaces équipotentielles, les surfaces pour lesquelles le potentiel V a une valeur constante dans toute leur étendue. Ces surfaces sont données par l'équation

$$V = C,$$

dans laquelle C est constant pour une même surface.

Il résulte de la forme de cette équation qu'en chaque point de l'espace, il passe une surface équipotentielle, et qu'il n'en peut passer qu'une seule.

La force qui agit sur l'unité de masse électrique, ou, en général, sur une quantité quelconque d'électricité, supposée concentrée en un point de l'espace, est normale à la surface équipotentielle qui passe par ce point.

En effet, les composantes X, Y et Z de la force sont égales ou proportionnelles à

$$-\frac{dV}{dx}, \quad -\frac{dV}{dy} \quad \text{et} \quad -\frac{dV}{dz},$$

et, par conséquent, la force résultante forme avec chacun des axes coordonnés, celui de x, par exemple, un angle dont le cosinus est représenté par

$$\frac{-\dfrac{dV}{dx}}{\sqrt{\left(\dfrac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\dfrac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\dfrac{dV}{dz}\right)^2}}.$$

Ce cosinus est le même que celui que forme avec l'axe des x la normale à la surface $V = C$, menée au même point, extérieurement à cette surface.

Il en est de même pour les angles que forme la force résultante avec les axes des y et des z.

430. Si F est la force agissante en un point, et dV l'accroissement du potentiel lorsqu'on passe de ce point à un point voisin situé sur la normale à une distance dn, on a

$$F = -\frac{dV}{dn}.$$

On peut, en effet, supposer que l'axe des x coïncide avec la normale; les composantes suivant les deux autres axes sont nulles, et l'on a pour la valeur de cette composante, qui, dans ce cas, est égale à la force agissante, $F = -\dfrac{dV}{dx}$ ou $F = -\dfrac{dV}{dn}$.

III.

431. *Dérivées secondes du potentiel.* — Les dérivées secondes du potentiel jouissent de propriétés remarquables, et leur étude conduit à des résultats importants.

On a vu (nº 422) que l'on a entre les composantes X, Y et Z de la force qui agit sur l'unité de masse électrique, le potentiel V au point où se trouve cette unité, et les masses agissantes, dq, situées à des distances r, les relations

$$X = -\frac{dV}{dx} = -\sum \frac{dq(x_1 - x)}{r^3},$$
$$Y = -\frac{dV}{dy} = -\sum \frac{dq(y_1 - y)}{r^3},$$
$$Z = -\frac{dV}{dz} = -\sum \frac{dq(z_1 - z)}{r^3},$$

Prenons les dérivées des composantes X, Y et Z, et, par conséquent, les dérivées secondes du potentiel V, par rapport à x, y et z. On a, pour la première équation,

$$\frac{dX}{dx} = -\frac{d^2V}{dx^2} = -\sum dq\left(-\frac{1}{r^3} - 3\,\frac{(x_1 - x)}{r^4}\,\frac{dr}{dx}\right),$$

ou, en tenant compte de la relation

$$r^2 = (x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2,$$

qui donne, en prenant la dérivée,

$$r\frac{dr}{dx} = -(x_1 - x),$$
$$\frac{dX}{dx} = -\frac{d^2V}{dx^2} = -\sum dq\left(-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{(x_1 - x)^2}{r^5}\right).$$

On a de même

$$\frac{dY}{dy} = -\frac{d^2V}{dy^2} = -\sum dq\left(-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{(y_1 - y)^2}{r^5}\right),$$
$$\frac{dZ}{dz} = -\frac{d^2V}{dz^2} = -\sum dq\left(-\frac{1}{r^3} + 3\,\frac{(z_1 - z)^2}{r^5}\right).$$

En ajoutant ces trois équations et remarquant que la somme des derniers termes est nulle, il vient

$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0$$

ou

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

On représente ordinairement le terme $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$ par le symbole ΔV, et l'on pose

$$\Delta V = 0.$$

432. On ne peut appliquer le même calcul lorsque le point considéré est situé à l'intérieur de la masse agissante, car, dans ce cas, la distance r devient infiniment petite. Pour savoir ce que devient alors V, il faut avoir recours à une autre méthode.

Supposons d'abord que la masse agissante ait une densité uniforme autour du point considéré, et concevons une sphère comprenant ce point. Soit V_1 le potentiel dû au fluide extérieur à la sphère, et V_2 celui qui est dû au fluide qu'elle contient, la valeur de ΔV sera égale à la somme $\Delta V_1 + \Delta V_2$.

On a, ainsi qu'on vient de le voir, $\Delta V_1 = 0$, puisque le point considéré n'est pas en contact avec le fluide extérieur à la sphère.

Pour avoir ΔV_2, remarquons qu'on a, ainsi qu'on l'a vu plus haut (n° 426), k étant la densité du fluide électrique autour du point considéré,

$$\frac{dV_2}{dx} = -\frac{4}{3}\pi k x$$

et par conséquent

$$\frac{d^2V_2}{dx^2} = -\frac{4}{3}\pi k.$$

De même

$$\frac{d^2V_2}{dy^2} = -\frac{4}{3}\pi k,$$

$$\frac{d^2V_2}{dz^2} = -\frac{4}{3}\pi k.$$

En faisant la somme des trois équations, il vient

$$\frac{d^2V_2}{dx^2} + \frac{d^2V_2}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = -4\pi k,$$

ou

$$\Delta V_2 = -4\pi k.$$

On a par conséquent

$$\Delta V = \Delta V_1 + \Delta V_2 = -4\pi k.$$

433. La même formule s'applique au cas où le fluide électrique n'a pas une densité uniforme autour du point considéré, car on peut concevoir autour de ce point une sphère de rayon assez faible pour qu'on puisse considérer la densité comme sensiblement uniforme à son intérieur. La démonstration rigoureuse en a été donnée par M. Clausius. (Voir le *Traité de la chaleur* de M. Briot.)

Ainsi, suivant que le point que l'on considère est en dehors de la masse électrique ou est situé à l'intérieur, on a

$$\Delta V = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta V = -4\pi k.$$

On peut se contenter de la formule unique

$$\Delta V = -4\pi k,$$

en considérant la densité k comme positive, comme négative, ou comme nulle, suivant que le fluide qui entoure le point est positif ou négatif, ou qu'il n'en existe pas.

434. *Équilibre électrique dans les corps conducteurs.* — Les corps conducteurs sont ceux qui n'opposent pas de résistance absolue au passage de l'électricité, c'est-à-dire qui sont tels que la plus petite force suffit pour faire mouvoir le fluide électrique à leur intérieur.

Pour que l'équilibre électrique existe dans des conducteurs électrisés, soit directement soit par l'influence de masses électriques situées dans leur voisinage, il faut donc que la force qui agit en un point quelconque de l'intérieur de ces corps soit nulle, et qu'elle soit normale à la surface de séparation des conducteurs et des substances isolantes qui les entourent.

En effet, si cette force n'était pas nulle à l'intérieur du corps, elle ferait mouvoir le fluide qui s'y trouve ou produirait une décomposition du fluide neutre en entraînant, d'un côté, l'électricité positive et, de l'autre, l'électricité négative.

La force doit être normale à la surface limite des corps conducteurs, car si elle était oblique il en résulterait une composante parallèle à la tangente, et il y aurait mouvement de l'électricité. La surface extérieure des corps conducteurs est donc toujours une surface de niveau.

A l'intérieur de chacun des conducteurs qui se trouvent dans un champ magnétique, on doit donc avoir

$$X = -\frac{dV}{dx} = 0, \quad Y = -\frac{dV}{dy} = 0 \quad \text{et} \quad Z = -\frac{dV}{dz} = 0.$$

Il en résulte que le potentiel V est constant dans toute l'étendue de chacun de ces corps.

Les dérivées $\frac{d^2V}{dx^2}$, $\frac{d^2V}{dy^2}$ et $\frac{d^2V}{dz^2}$ sont également nulles, et l'on a, par conséquent, $\Delta V = 0$. On a vu que ΔV est lié en chaque point à la densité k de l'électricité par la relation $\Delta V = -4\pi k$; on en conclut donc que la densité k est nulle, et qu'il ne peut exister d'électricité libre à l'intérieur des corps conducteurs. Le fluide électrique réside entièrement à leur surface, contre laquelle il est maintenu par les corps isolants qui les environnent.

Si ε est l'épaisseur de la couche électrique, la quantité d'électricité dq qui correspond à un élément de surface $d\sigma$ est $k\varepsilon d\sigma$. Comme on ne peut évaluer ni la densité k, ni l'épaisseur infiniment faible ε de la couche, on pose $k\varepsilon = \delta$, et l'on a $dq = \delta d\sigma$. Le coefficient δ est ce que les physiciens nomment *l'épaisseur* ou la *densité* de la couche électrique qui correspond à l'élément de surface $d\sigma$.

435. Ainsi qu'on vient de le voir, la valeur du potentiel est la même pour tous les points qui sont situés à l'intérieur d'un corps conducteur, mais elle varie pour les points extérieurs. Lorsqu'on passe d'un point intérieur à un point extérieur très rapproché, la variation est très faible,

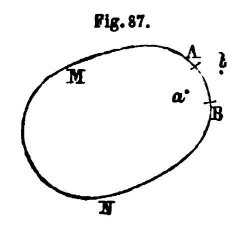
car la partie de la couche qui entoure immédiatement le point considéré ne modifie que d'une quantité très faible la valeur du potentiel.

Quant à la force qui agit sur l'unité de masse électrique supposée concentrée en un point, elle est nulle lorsque le point est à l'intérieur d'un conducteur, et a pour valeur, à l'extérieur, $-\frac{dV}{dn}$; elle augmente donc subitement pour un point qui traverse la couche électrique.

436. Cherchons la pression qu'exerce l'électricité accumulée sur un conducteur contre le corps isolant qui l'entoure.

Soit AB (*fig.* 87) un petit élément de la surface d'un conducteur MN, sur lequel se trouve répandu le fluide électrique. Considérons un point a situé à l'intérieur du conducteur et infiniment rapproché de AB. La force qui agit en ce point sur l'unité de masse électrique est nulle, et, par conséquent, l'action exercée par le fluide de l'élément AB est égale et de signe contraire à celle du fluide qui se trouve répandu sur le reste AMNB du corps.

Fig. 87.



Si l'unité de masse électrique se trouve à l'extérieur, en b, à une distance infiniment petite de l'élément AB, l'action de ce dernier est égale et de signe opposé à celle qu'il exerçait lorsque le point était intérieur; elle est donc égale à celle du fluide répandu en AMNB, et de même signe.

Or l'action totale exercée par la couche entière sur l'unité de masse électrique concentrée en b est $-\frac{dV}{dn}$; l'action due à la portion AMNB est donc $\frac{1}{2}\frac{dV}{dn}$. L'action serait la même sur l'unité de masse supposée concentrée en un point de l'élément AB.

Si δ est la densité de la couche électrique en AB, et $d\sigma$ l'étendue de la surface, la quantité d'électricité répandue en AB est $\delta d\sigma$, et, par conséquent, la force à laquelle est soumise cette quantité d'électricité, qui représente la pression qu'elle exerce contre le corps isolant qui l'entoure, est

$$-\frac{1}{2} h d\sigma \frac{dV}{dn}$$

nous évaluerons plus loin la dérivée $\frac{dV}{dn}$.

IV.

437. *Evaluation de la quantité d'électricité contenue dans un volume donné.* — Si k représente la densité de l'électricité en un point donné d'une masse électrique, la quantité de fluide qui est contenue dans un élément de volume, $dxdydz$ ou dv, est $kdxdydz$ ou kdv.

D'un autre côté, on a vu que ΔV, ou $\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$, a pour valeur au même point $-4\pi k$.

La quantité totale d'électricité contenue dans un volume donné, $\int k dv$, est donc égale à $-\frac{1}{4\pi}\int \Delta V dv$. Pour déterminer cette quantité, il faut calculer, ou modifier de façon à pouvoir l'interpréter, l'intégrale $\int \Delta V dv$ ou

$$\iiint \left(\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}\right) dxdydz.$$

Cette intégrale se divise en trois parties. Considérons l'une d'elles

$$\iiint \frac{d^2V}{dx^2} dxdydz;$$

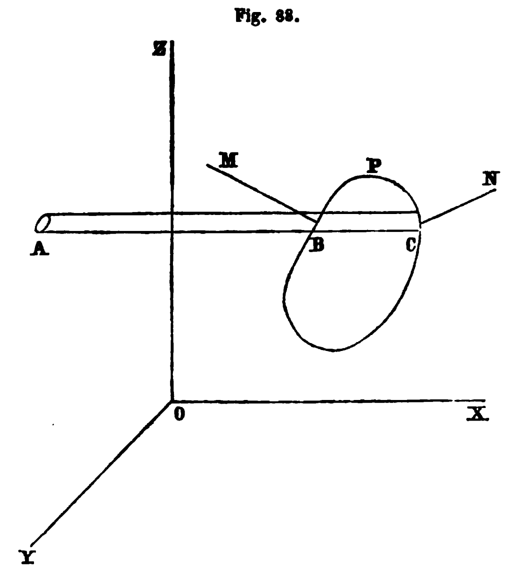
on peut la mettre sous la forme

$$\iint dydz \int \frac{d^2V}{dx^2} dx = \iint dydz \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_2} - \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}\right],$$

$\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}$ et $\left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}$ étant les valeurs de $\frac{dV}{dx}$ qui correspondent aux deux limites x_2 et x_1.

Soit P (*fig.* 88) le volume occupé par la masse électrique, x_1 et x_2 les

Fig. 88.



deux limites AB et AC qui correspondent à une valeur déterminée de y et de z. Le produit $dydz$ représente la surface A, c'est-à-dire la projection des deux éléments de surface B et C sur le plan des YZ. Si $d\sigma_1$ est la surface B et $d\sigma_2$ la surface C, et si α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2 et γ_2 sont les cosinus des angles que forment les deux normales BM et CN à ces éléments avec les trois axes OX, OY et OZ, on a

$$dydz = -\alpha_1 d\sigma_1 = \alpha_2 d\sigma_2$$

et l'intégrale devient

$$\int \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_2} \alpha_2 d\sigma_2 + \int \left(\frac{dV}{dx}\right)_{x_1} \alpha_1 d\sigma_1.$$

Il est évident que cette expression est égale à l'intégrale

$$\int \frac{dV}{dx}\, \alpha d\sigma,$$

étendue à la surface entière du volume considéré, $d\sigma$ étant un élément quelconque de surface et α l'angle que forme la normale à cet élément avec l'axe des x. On a donc

$$\iiint \frac{d^2V}{dx^2}\, dxdydz = \int \frac{dV}{dx}\, \alpha d\sigma.$$

On a de même

$$\iiint \frac{d^2V}{dy^2}\, dxdydz = \int \frac{dV}{dy}\, \beta d\sigma,$$

$$\iiint \frac{d^2V}{dz^2}\, dxdydz = \int \frac{dV}{dz}\, \gamma d\sigma.$$

La somme de ces trois équations donne

$$\iiint \Delta V dxdydz = \int \left(\frac{dV}{dx}\alpha + \frac{dV}{dy}\beta + \frac{dV}{dz}\gamma\right) d\sigma.$$

Désignons par dn un élément de la normale BM à la surface qui enveloppe la masse électrique, pris à l'extérieur, on a

$$\alpha = \frac{dx}{dn}, \quad \beta = \frac{dy}{dn}, \quad \gamma = \frac{dz}{dn},$$

et, par conséquent,

$$\iiint \Delta V dxdydz = \int \left(\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dn} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dn}\right) d\sigma,$$

ou, en remarquant que

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dn} + \frac{dV}{dy}\frac{dy}{dn} + \frac{dV}{dz}\frac{dz}{dn} = \frac{dV}{dn},$$

$$\iiint \Delta V dxdydz = \int \frac{dV}{dn}\, d\sigma$$

ou enfin

$$\text{(A)} \qquad \int \Delta V dv = \int \frac{dV}{dn} d\sigma,$$

les intégrales devant être prises, la première pour tout le volume considéré, et la seconde pour la surface entière qui l'enveloppe.

Nous avons supposé que le volume considéré était limité par une surface convexe, mais on peut appliquer le même mode de raisonnement au cas d'une surface fermée de forme quelconque.

Cette équation conduit à plusieurs conséquences importantes.

438. La somme algébrique, Q, des quantités d'électricité renfermées dans un volume, $Q = \int k dv$, égale à $-\frac{1}{4\pi}\int \Delta V dv$ (n° 437), a pour valeur, en vertu de la formule précédente, $-\frac{1}{4\pi}\int \frac{dV}{dn} d\sigma$. On a donc

$$\text{(B)} \qquad \int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi Q.$$

On en déduit que si un corps conducteur enveloppe complètement des masses électriques, la somme algébrique des quantités d'électricité situées à l'intérieur et sur la surface interne du conducteur est nulle.

En effet, le potentiel est constant à l'intérieur du corps conducteur, et, si l'on conçoit dans ce corps une surface fermée comprise entre les deux surfaces extrêmes, intérieure et extérieure, on aura, pour tous les points de cette surface et les points qui l'environnent, en représentant par C une constante, $V = C$, et, par conséquent, $\frac{dV}{dn} = 0$.

La formule précédente donne donc

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi Q = 0 \quad \text{ou} \quad Q = 0.$$

Si q, q', q'', etc., sont les masses électriques qui se trouvent dans l'espace enveloppé par le conducteur, et Q_1 la quantité de fluide accumulé à la surface interne de ce dernier, on a donc

$$Q = Q_1 + q + q' + q'' \ldots = 0.$$

S'il n'existe pas dans l'espace d'autres masses électriques que celles qui sont enveloppées par le conducteur, et si ce conducteur était primitivement à l'état neutre, il subit par influence une décomposition de son fluide neutre, et la somme algébrique des quantités d'électricité développées sur la surface intérieure et sur la surface extérieure est nulle; en représentant par Q_1 et Q_2 ces quantités, on a

$$Q_1 + Q_2 = 0;$$

et l'on déduit de la relation précédente

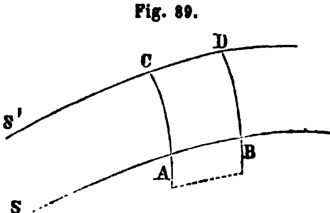
$$Q_2 = -Q_1 = q + q' + q'' \ldots$$

La quantité d'électricité qui se porte à la surface d'un corps conducteur enveloppant est donc égale à la quantité inductrice (loi de Faraday).

439. Considérons deux surfaces de niveau d'une distribution électrique,

S et S' (*fig.* 89), et soit $AB = d\sigma_1$ un élément de l'une d'elles. Concevons la surface engendrée par les lignes de force telles que AC, menées par tous les points de la courbe qui limite $d\sigma_1$; elle découpera sur la surface S' un petit élément $CD = d\sigma_2$ qui sera l'élément correspondant à AB.

Fig. 89.



Appliquons au volume ainsi engendré, ABCD, la formule

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi Q,$$

en remarquant que, pour la surface latérale engendrée par les lignes de force, $\frac{dV}{dn}$ est nul et que, par conséquent, l'intégrale doit seulement se rapporter aux deux bases AB et CD, pour lesquelles les dérivées $\frac{dV}{dn}$ doivent être prises avec des signes contraires. On a, en représentant par Q la quantité d'électricité contenue dans le volume ABCD,

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_1 - \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = -4\pi Q.$$

S'il n'existe pas de fluide dans le canal ABCD, l'équation devient

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_2 d\sigma_2 = \left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1,$$

qui constitue un des théorèmes de M. Chasles.

440. Supposons que dans la figure 89, S soit la surface d'un corps conducteur, que la surface orthogonale représentée par les lignes AC et BD soit prolongée jusqu'à l'intérieur de ce conducteur, dans l'étendue duquel le potentiel est constant et pour lequel $\left(\frac{dV}{dn}\right)_1$ est nul, enfin que la surface S' soit une surface de niveau extérieure située en dehors du conducteur et au delà de la couche électrique, on aura

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 d\sigma_1 = -4\pi Q.$$

La quantité Q d'électricité répandue sur la surface AB est égale au produit de la surface $d\sigma_1$ par la densité de l'électricité (produit de la densité par l'épaisseur de la couche électrique); si on la représente par δ, on a $Q = \delta \times d\sigma_1$, et

$$\frac{dV}{dn} = -4\pi\delta.$$

441. On a vu (n° 436) que la pression exercée par une couche électrique répandue à la surface d'un conducteur contre le corps isolant qui l'en-

teure est égale à

$$-\frac{1}{2}\,\delta d\sigma\,\frac{dV}{dn};$$

en remplaçant $\frac{dV}{dn}$ par sa valeur, on a donc pour cette pression

$$2\pi\delta^2 d\sigma.$$

Rapportée à l'unité de surface, cette pression est $2\pi\delta^2$.

Lorsqu'on connait la loi de distribution de l'électricité à la surface d'un conducteur et le potentiel de la charge, on peut en déduire la densité δ.

Ainsi, pour une sphère isolée de rayon r, électrisée au potentiel V, la charge électrique est rV et la densité δ est

$$\delta = \frac{rV}{4\pi r^2} = \frac{V}{4\pi r}.$$

La pression exercée contre l'air est donc, par unité de surface,

$$\frac{2\pi V^2}{16\pi^2 r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{V^2}{8\pi r^2}.$$

La pression totale pour la surface entière est $\frac{V^2}{2\pi}$; elle est indépendante du rayon de la sphère.

Avec un potentiel égal à 30 unités absolues, on aurait pour la pression $\frac{900}{2\pi} = 146$ unités absolues de force ou environ $14^{\text{grammes}},6$. La pression par centimètre carré serait $\frac{14}{4\pi r^2}$ grammes, le rayon r étant exprimé en centimètres.

441. Si S et S' (*fig.* 89) sont les surfaces de deux conducteurs, et si l'on prolonge le canal orthogonal ABDC jusqu'à l'intérieur des deux corps, dont le potentiel est constant, on a

$$\left(\frac{dV}{dn}\right)_1 = 0, \quad \left(\frac{dV}{dn}\right)_2 = 0 \quad \text{et par conséquent} \quad Q = 0 \ (\text{n}^\circ\ 439).$$

Si donc une des deux surfaces est électrisée, une quantité égale d'électricité contraire doit se trouver en regard sur l'autre face.

On en déduit que si un conducteur électrisé est complètement enveloppé par un autre conducteur, la surface interne de ce dernier doit prendre une charge électrique égale à celle du conducteur intérieur, et de signe contraire.

V.

442. *Formule générale de Green.* — Pour compléter l'étude des phénomènes d'électricité statique il est nécessaire de prendre une formule plus générale que la formule $\int \Delta V dv = \int \frac{dV}{dn}\,d\sigma$, donnée plus haut, et de

transformer de la même manière l'intégrale $\int U\Delta V dv$ ou $\iiint U\Delta V dxdydz$, prise dans toute l'étendue d'une surface donnée, sans faire d'ailleurs aucune hypothèse spéciale sur la nature des deux fonctions U et V.

En remplaçant ΔV par sa valeur $\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}$, l'expression $\int U\Delta V dv$ devient

$$\iiint U\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dxdydz.$$

Considérons le premier terme de cette formule

$$\iiint U\frac{d^2V}{dx^2}dxdydz;$$

on peut le mettre sous la forme

$$\iint dydz\left[\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}-\left(U\frac{dV}{dx}\right)_1\right]-\iiint\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dv,$$

$\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_2}$ et $\left(U\frac{dV}{dx}\right)_{x_1}$ étant les deux valeurs de $U\frac{dV}{dx}$ qui correspondent aux deux limites x_1 et x_2.

En opérant comme nous l'avons fait précédemment (n° 437), et représentant par α, β et γ les angles que forme avec les trois axes coordonnés la normale à un élément de surface, $d\sigma$, on arrive facilement à la formule

$$\int U\frac{d^2V}{dx^2}dv=\int\alpha U\frac{dV}{dx}d\sigma-\int\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}dv.$$

On a de même, pour les deux autres parties de l'intégrale,

$$\int U\frac{d^2V}{dy^2}dv=\int\beta U\frac{dV}{dy}d\sigma-\int\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}dv,$$
$$\int U\frac{d^2V}{dz^2}dv=\int\gamma U\frac{dV}{dz}d\sigma-\int\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}dv.$$

En faisant la somme et remarquant que, si dn est l'élément de la normale à l'élément de surface $d\sigma$,

$$\alpha=\frac{dx}{dn},\quad \beta=\frac{dy}{dn},\quad \gamma=\frac{dz}{dn},$$

et que

$$\frac{dV}{dx}\frac{dx}{dn}+\frac{dV}{dy}\frac{dy}{dn}+\frac{dV}{dz}\frac{dz}{dn}=\frac{dV}{dn},$$

on arrive à l'équation

$$\text{(C)}\quad \int U\Delta V dv=\int U\frac{dV}{dn}d\sigma-\int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv,$$

qui est la formule générale de Green.

La première et la dernière intégrale doivent être prises pour toute l'étendue du volume, et la seconde pour toute la surface qui l'enveloppe.

L'équation (A) n'est qu'un cas particulier de la formule de Green, et correspond au cas où la fonction U est égale à l'unité.

443. Si l'on suppose que U soit égal à V l'équation devient

$$\text{(D)}\quad \int V\Delta V dv = \int V \frac{dV}{dn} d\sigma - \int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dv.$$

Admettons que dans cette équation V représente le potentiel électrique en un point quelconque du volume entouré par la surface, dont $d\sigma$ représente l'élément; on peut en tirer plusieurs conséquences importantes.

444. Supposons qu'à l'intérieur, il n'existe aucune masse agissante, et que le potentiel soit constant pour tous les points de cette surface; il résulte de l'équation précédente que le potentiel est aussi constant dans tout le volume enveloppé.

En effet, le potentiel V étant constant dans toute l'étendue de la surface enveloppante, on a, en le représentant par V_1,

$$\int V \frac{dV}{dn} d\sigma = V_1 \int \frac{dV}{dn} d\sigma.$$

On a vu (n° 438) que si Q est la quantité d'électricité libre à l'intérieur de la surface,

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = -4\pi Q.$$

Dans le cas actuel $Q = 0$; on a donc

$$\int \frac{dV}{dn} d\sigma = 0$$

et par suite

$$\int V \frac{dV}{dn} d\sigma = 0.$$

D'un autre côté, pour tous les points d'un volume occupé par l'électricité, ΔV est égal à $-4\pi k$ (n° 433), et, par conséquent, est nul dans le cas actuel, puisque la densité k est nulle.

L'équation D se réduit donc à

$$\int\left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right]dv = 0,$$

qui ne peut être remplie que si l'on a, en tous les points, $\frac{dV}{dx} = 0$, $\frac{dV}{dy} = 0$ et $\frac{dV}{dz} = 0$, c'est-à-dire si le potentiel V est constant.

445. On en conclut que lorsqu'un corps conducteur présente des cavités ne renfermant aucune masse agissante, toute l'électricité libre qu'il peut contenir se porte à la surface extérieure, comme si le corps était plein.

Supposons, en effet, qu'en un point situé à l'intérieur de la cavité le potentiel ait une valeur V_0 différente du potentiel V de l'enveloppe con-

ductrice, on pourra mener de ce point à l'enveloppe une série de rayons le long desquels le potentiel variera d'une manière continue de V_a à V, et prendre sur chacun d'eux un point dont le potentiel soit compris entre V_a et V et égal à V_b; imaginons une surface passant par tous ces points. On aura ainsi une surface de niveau enveloppant un volume qui ne contient aucune masse électrique, et l'on a vu plus haut (nº 444) que le potentiel doit être constant à l'intérieur; on ne peut donc avoir V_a différent de V_b et de V.

Le potentiel étant constant pour le corps conducteur et tous les points enveloppés, on doit avoir en chaque point $\frac{dV}{dx}=0$, $\frac{dV}{dy}=0$ et $\frac{dV}{dz}=0$, ou $\Delta V=0$, et par conséquent la densité k est nulle, puisque $\Delta V=-4\pi k$.

446. On peut encore déduire de ce qui précède qu'un système formé de masses électriques répandues sur des corps conducteurs n'admet qu'un seul état d'équilibre.

Supposons d'abord que chacun des conducteurs renferme des quantités égales d'électricité positive et d'électricité négative, et que dans l'espace environnant il n'y ait en aucun point de l'électricité libre, nous allons démontrer que le seul état d'équilibre est l'état neutre.

Admettons en effet que les potentiels soient différents, et soit V_1 celui du corps dont le potentiel a la plus grande valeur.

On pourra concevoir une série de lignes partant d'un point quelconque de ce corps, allant dans toutes les directions, et sur lesquelles le potentiel variera d'une manière continue, soit qu'elles rencontrent un autre conducteur, soit qu'elles aillent sans en rencontrer jusqu'à l'infini, où le potentiel est nul.

Prenons sur chacune de ces lignes un point dont le potentiel ait une valeur V_a inférieure à V_1 et supérieure à celui des autres conducteurs. En faisant passer une surface par tous ces points, on aura une surface dont le potentiel V_a sera constant, à laquelle on pourra appliquer la formule D.

Remarquons que l'on a

$$\int V\frac{dV}{dn}\,d\sigma=V_1\int\frac{dV}{dn}\,d\sigma=-4\pi V_1 Q=0,$$

Q étant la quantité d'électricité répandue dans le volume enveloppé par la surface, qui est nulle par hypothèse.

D'un autre côté, toutes les masses électriques comprises dans la surface considérée étant situées sur le corps, dont le potentiel est V_1, on a, en prenant l'intégrale $\int V\Delta V dv$ pour ce corps entier et en tenant compte de la relation $\Delta V=-4\pi k$,

$$\int V\Delta V dv=V_1\int\Delta V dv=-4\pi V_1\int k dv=-4\pi V_1 Q=0.$$

L'équation (D) se réduit donc à

$$\int\left(\frac{d^2V}{dx^2}+\frac{d^2V}{dy^2}+\frac{d^2V}{dz^2}\right)dv=0,$$

qui conduit à $\frac{dV}{dx}=\frac{dV}{dy}=\frac{dV}{dz}=0$; les dérivées secondes du potentiel sont donc aussi nulles, et l'on a en chaque point $\Delta V = -4\pi k = 0$ ou $k = 0$. Il ne peut donc y avoir de fluide libre à la surface du corps conducteur considéré.

Il en est de même pour tous les autres conducteurs qui doivent être à l'état neutre.

Supposons maintenant qu'on ait dans un espace des masses électriques q, q', q'', etc., appartenant à des corps isolants et des charges Q, Q', Q'' distribuées sur des corps conducteurs ; il est aisé de démontrer qu'il ne peut y avoir qu'un seul état d'équilibre électrique.

Admettons qu'il y en ait deux et que dans le premier les densités aux divers points des conducteurs soient δ, δ', δ'', δ''', etc., dans l'un des états d'équilibre, et δ_1, δ'_1, δ''_1, δ'''_1, etc., dans le second.

Si l'on change le signe de toutes les masses électriques qui correspondent au second état d'équilibre, on aura un nouvel état qui sera également en équilibre et correspondra aux masses $-q$, $-q'$, $-q''$, etc., et aux densités $-\delta_1$, $-\delta'_1$, $-\delta''_1$, etc.

Superposons ce nouvel état d'équilibre au premier, il est évident que l'équilibre devra subsister. Il n'y aura plus de masse électrique correspondant aux corps isolants, et les densités qui correspondent aux divers points des conducteurs, seront

$$\delta-\delta_1, \quad \delta'-\delta'_1, \quad \delta''-\delta''_1, \quad \text{etc.}$$

La quantité d'électricité répandue sur chacun des conducteurs est nulle, et, ainsi qu'on vient de le voir, le seul état d'équilibre est l'état neutre, c'est-à-dire celui où l'on a $\delta-\delta_1=0$, $\delta'-\delta'_1=0$, $\delta'''-\delta'''_1=0$, etc., ou $\delta=\delta_1$, $\delta'=\delta'_1$, $\delta''=\delta''_1$, etc.

Le système n'est donc susceptible que d'un seul état d'équilibre.

VI.

447. La formule générale de Green établie plus haut

$$\int U\Delta V dv = \int U\frac{dV}{dn}d\sigma - \int\left(\frac{dU}{dx}\frac{dV}{dx}+\frac{dU}{dy}\frac{dV}{dy}+\frac{dU}{dz}\frac{dV}{dz}\right)dv$$

a été établie sans faire aucune hypothèse sur la nature et la forme des deux fonctions U et V ; on peut intervertir ces deux fonctions et poser

$$\int V\Delta U dv = \int V\frac{dU}{dn}d\sigma - \int\left(\frac{dV}{dx}\frac{dU}{dx}+\frac{dV}{dy}\frac{dU}{dy}+\frac{dV}{dz}\frac{dU}{dz}\right)dv.$$

En retranchant la seconde équation de la première, il vient

$$\text{(E)} \qquad \int U\Delta V dv - \int V\Delta U dv = \int\left(U\frac{dV}{dn} - V\frac{DU}{dn}\right)d\sigma,$$

les deux premières intégrales devant être étendues à tout le volume enveloppé par la surface et la seconde à toute la surface enveloppante.

448. Supposons que dans cette équation V représente le potentiel en un point intérieur du volume enveloppé par une surface, potentiel dû aussi bien aux masses électriques contenues dans ce volume qu'aux masses extérieures, et que U ait pour valeur $\frac{1}{\rho}$, ρ représentant la distance d'un point intérieur quelconque à un point fixe, que nous désignerons par P, l'équation devient

$$\text{(F)} \qquad \int \frac{\Delta V dv}{\rho} - \int V\Delta \frac{1}{\rho}\, dv = \int \left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{dn} - V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} \right) d\sigma.$$

449. On a vu plus haut (n° 432) que pour tout point intérieur à une masse électrique, on a

$$\Delta V = -4\pi k,$$

k étant la densité de l'électricité au point considéré; on a donc

$$\int \frac{\Delta V dv}{\rho} = -4\pi \int \frac{k dv}{\rho} = -4\pi V_b,$$

V_b représentant le potentiel au point P dû à la masse électrique enveloppée.

450. En ce qui concerne le second terme, $\int V\Delta \frac{1}{\rho}\, dv$, il y a deux cas à considérer suivant que le point d'où partent les rayons ρ est extérieur à la surface enveloppante, ou qu'il est intérieur.

Dans le premier cas, ρ ne devenant jamais infiniment petit, on a

$$\Delta \frac{1}{\rho} = 0$$

ou

$$\frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{dx^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{dy^2} + \frac{d^2 \frac{1}{\rho}}{dz^2} = 0.$$

On arrive à cette relation par la même méthode que celle employée au n° 431, qui nous a conduit à l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2} = 0.$$

Pour un point intérieur à la masse électrique, la même méthode ne peut s'appliquer; mais on peut concevoir autour du point P une petite sphère et diviser le volume occupé par l'électricité en deux parties, l'une extérieure et l'autre intérieure à la sphère. La formule précédente est applicable à la masse électrique extérieure, qui donne par conséquent

$$\Delta \frac{1}{\rho} = 0 \quad \text{ou} \quad \int V\Delta \frac{1}{\rho}\, dv = 0.$$

Quant à la masse intérieure, dont le potentiel V est constant et égal à celui du point P, si l'on suppose la sphère de très petit rayon, on a,

en représentant ce potentiel par V_a,

$$\int V\Delta \frac{1}{\rho}\, dv = V_a \int \Delta \frac{1}{\rho}\, dv = V_a \Delta \int \frac{dv}{\rho}$$

Or on a vu qu'en un point occupé par le fluide électrique, ΔV ou $\Delta \int \frac{dq}{r}$, ou enfin $\Delta \int \frac{kdv}{r}$ est égal à $-4\pi k$; si $k = 1$, on a $\Delta \int \frac{dv}{r} = -4\pi$; on peut donc poser $\Delta \int \frac{dv}{\rho} = -4\pi$, et, par suite,

$$\int V\Delta \frac{1}{\rho}\, dv = -4\pi V_a.$$

451. Ainsi l'équation F peut se mettre sous la forme

$$\text{(G)} \qquad -4\pi V_b = \int \left(\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn} - V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} \right) d\sigma,$$

si le point d'où partent les rayons est à l'extérieur de la surface qui enveloppe la masse électrique considérée, et sous la forme

$$\text{(H)} \qquad 4\pi(V_a - V_b) = \int \left(\frac{1}{\rho} \frac{dV}{dn} - V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} \right) d\sigma,$$

si ce point est situé à l'intérieur de cette surface.

Si toutes les masses électriques sont à l'intérieur de la surface, on a $V_a = V_b$; si, au contraire, elles sont extérieures, on a $V_b = 0$.

452. On déduit de ces deux relations que, lorsque dans un système électrisé en équilibre un conducteur enveloppe diverses masses électriques, la couche répandue à sa surface interne et les masses électriques situées à l'intérieur constituent un système en équilibre et dont l'action à l'extérieur est nulle.

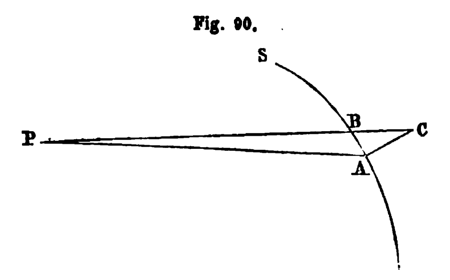
Concevons, en effet, dans le corps conducteur enveloppant, une surface fermée comprise entre les deux limites de ce conducteur, et appliquons l'équation précédente à cette surface, en remarquant que, le potentiel du corps enveloppant étant constant, on a $\frac{dV}{dn} = 0$, et qu'en représentant par V_1 ce potentiel, on peut poser

$$-\int V \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn}\, d\sigma = -V_1 \int \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn}\, d\sigma.$$

On peut démontrer d'ailleurs que $\int \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn} d\sigma$ est égal à 0, ou à -4π suivant que le point P, d'où partent les rayons ρ, est extérieur ou intérieur à la surface. Soit en effet S (*fig.* 90) la surface, dont $AB = d\sigma$ représente

un élément, AC la normale dn à cet élément, APB un cône dont le sommet est au point P et dont la base est l'élément $d\sigma$.

Fig. 90.



On a :

$$d\,\frac{1}{\rho} = -\frac{d\rho}{\rho^2},$$

$$dn = AC = \frac{BC}{\cos BCA} = \frac{d\rho}{\cos BCA};$$

pour transformer $d\sigma$, concevons une sphère de rayon égal à l'unité dont le centre soit au point P, et soit $d\omega$ la surface découpée sur cette sphère par le cône BPA, on aura

$$d\sigma = \text{surf. BA} = \omega \times \overline{PB}^2 \cos BCA = \omega\rho^2 \cos BCA.$$

En substituant dans l'expression $\int \frac{d\frac{1}{\rho}}{dn}\,db$ les valeurs de $d\,\frac{1}{\rho}$, de dn et de $d\sigma$, il vient

$$-\int d\omega.$$

Cette intégrale qui doit être étendue à toute la surface fermée qui enveloppe le volume considéré, est égale à zéro si le point P est à l'extérieur, et à -4π s'il est situé à l'intérieur.

453. Si le point est à l'extérieur de la surface qui enveloppe les masses électriques $\int V\,\frac{dV}{dn}\,d\sigma$ est nul, et l'on a, en vertu de l'équation G,

(I) $$V_b = 0.$$

S'il est à l'intérieur de la surface

$$\int V\,\frac{dV}{dn}\,db = -4\pi V_1,$$

et l'on a d'après l'équation H :

$$V_a - V_b = V_1,$$

ou

(J) $$V_a = V_b + V_1.$$

454. Ainsi, pour tout point extérieur à la surface enveloppante et par

conséquent aussi, pour tout point du corps conducteur qui forme l'enveloppe, le potentiel dû aux masses électriques situées à l'intérieur, et dont la somme algébrique est égale à zéro, est nul, ainsi que les composantes $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ et $\frac{dV}{dz}$ dues à ces masses électriques.

On ne change donc rien à l'équilibre extérieur si l'on fait disparaître le fluide libre situé à l'intérieur, en établissant une communication entre l'enveloppe et les corps électrisés qui y sont renfermés.

455. Pour les points situés à l'intérieur, le potentiel V_a a pour valeur

$$V_a = V_b + V_1,$$

V_1 étant le potentiel de l'enveloppe conductrice qui est uniquement dû à l'action des masses extérieures, et conserve la même valeur pour tous les points entourés par cette enveloppe.

La force qui agit en chaque point de l'intérieur, a pour composantes $\frac{dV_a}{dx}$, $\frac{dV_a}{dy}$ et $\frac{dV_a}{dz}$; elles sont égales aux trois composantes $\frac{dV_b}{dx}$, $\frac{dV_b}{dy}$ et $\frac{dV_b}{dz}$ qui résultent uniquement des masses électriques intérieures.

L'ensemble des masses intérieures constitue donc aussi un système en équilibre de lui-même, complètement indépendant des masses extérieures.

Si l'on fait communiquer l'enveloppe avec le sol, V_1 devient nul, et l'on a en chaque point $V_a = V_b$, le potentiel est alors uniquement dû aux masses intérieures, et est indépendant des quantités d'électricité situées à l'extérieur.

On sait que ces lois ont été trouvées expérimentalement par Faraday.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE V.

COURANT ÉLECTRIQUE.

CHAPITRE VI.

ORIGINES ET PROPRIÉTÉS DES COURANTS ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE VII.

PHÉNOMÈNES ET UNITÉS ÉLECTRO-DYNAMIQUES.

CHAPITRE VIII.

PHÉNOMÈNES ET UNITÉS MAGNÉTIQUES.

CHAPITRE IX.

ÉLECTRO-MAGNÉTISME.

CHAPITRE X.

DE L'INDUCTION.

CHAPITRE XI.

COMPARAISON DES UNITÉS ÉLECTROSTATIQUES ET DES UNITÉS ÉLECTRO-MAGNÉTIQUES.

CHAPITRE XII.

UNITÉS DE L'ASSOCIATION BRITANNIQUE ET MESURE DES GRANDEURS ÉLECTRIQUES.

CHAPITRE XIII.

DÉTERMINATION EXPÉRIMENTALE DE L'UNITÉ ABSOLUE DE RÉSISTANCE.

ERRATA

Le présent livre contient un certain nombre de fautes d'impression que le lecteur reconnaitra facilement.

Nous nous bornerons à signaler une erreur de calcul qui s'est glissée au n° 122 (page 173) :

La formule

$$R = \frac{t}{S \log \text{nép.} \frac{V}{V_1}} = \frac{t}{2{,}7188\, S \log \frac{V}{V_1}}$$

doit être remplacée par

$$R = \frac{t}{S \log \text{nép.} \frac{V}{V_1}} = \frac{t}{2{,}3025\, S \log \frac{V}{V_1}}.$$

Si le temps t est égal à celui qu'emploie le potentiel à décroître de moitié, $\log \frac{V}{V_1} = \log 2 = 0{,}30103$ et l'on a :

$$R = \frac{t}{2{,}3025 \times 0{,}30103\, S} = \frac{t}{0{,}6931\, S}$$

ou

$$RS = \frac{t}{0{,}6931},$$

au lieu de $RS = \frac{t}{0{,}216}$ (n° 123). Par suite, au n° 124, il faut

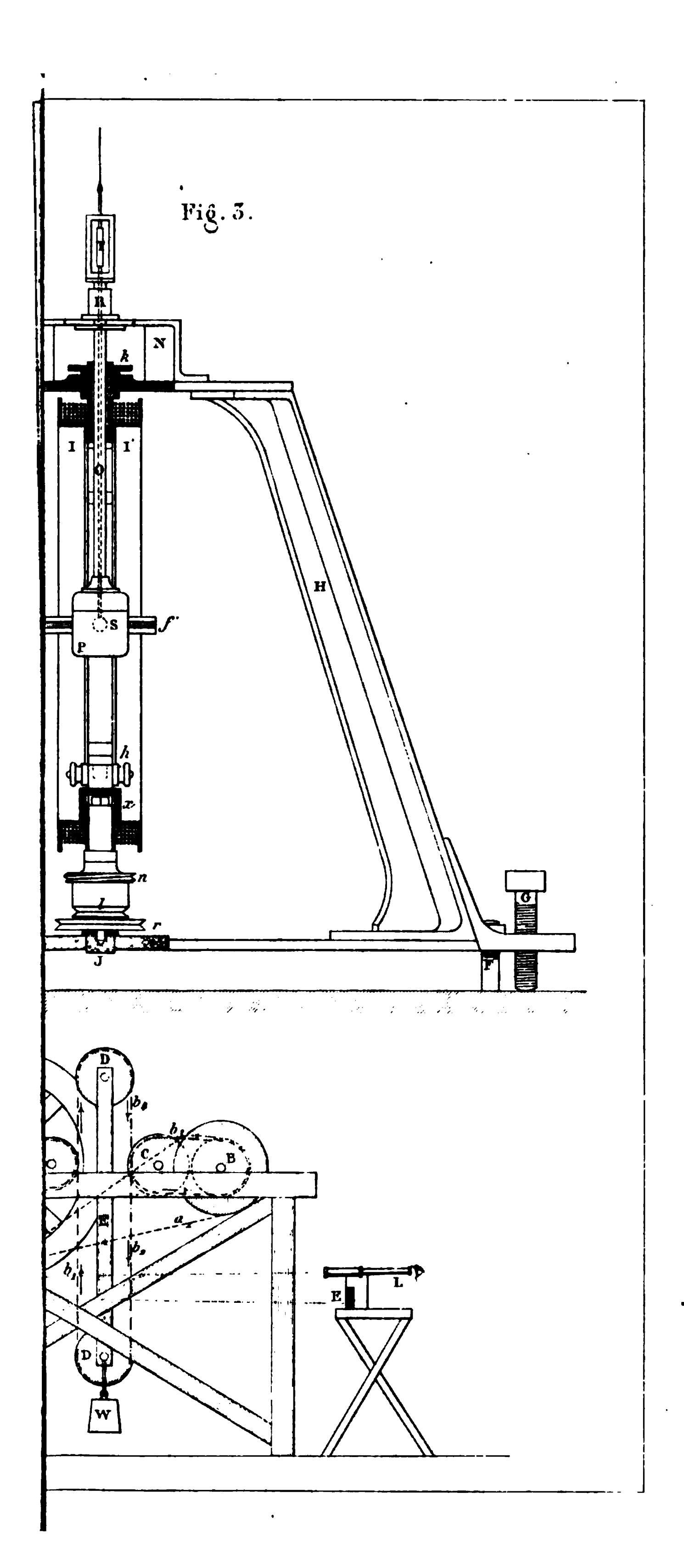
$$\frac{\rho c}{4\rho} = RS = \frac{21 \times 60''}{0{,}6931}$$

et

$$\rho c = \frac{4\pi \times 1260''}{0{,}6931} = 22840 \text{ secondes.}$$

Si l'on admet 3 pour le pouvoir spécifique inducteur, e, de la gutta-percha par rapport à l'air, on trouve pour sa résistance spécifique $\rho = 7613$ unités, au lieu du chiffre 24.400 indiqué au n° 124.

PARIS. — IMPRIMERIE ARNOUS DE RIVIÈRE, RUE RACINE, 26.


Fig. 3.
R
N
k
I
I'
O
H
S
f'
P
h
x
n
l
r
J
G
F
D
b
C
B
a
h
E
L
W



